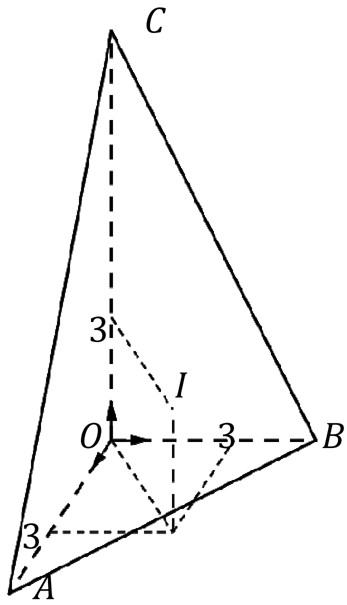
GEOMETRIE DANS L'ESPACE 4[éme] Math

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Exercice 1

Dans la figure ci-contre $OABC$ est un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OA} = 5\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OC} = 10\vec{k}$ et $I(3\,,3\,,3\,)$



1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation $2x + 2y + z - 10 = 0$

2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3.

   a) Quelle est la position relative S et du plan (ABC) ?

   b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).

3) Soit m un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport m. On désigne par S' la sphère image de S par h.

   a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).

   b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).

4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre $OABC$.

Exercice 2

On considère les points $A(1\,,0\,,0)$, $B(1\,,-1\,,1)$ et $C(-2\,,0\,,1)$

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan

   b) Donner une représentation paramétrique du plan $P=(ABC)$

2) a) On pose $\vec{U}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

   a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{U}$

   b) Donner une équation cartésienne du plan $P=(ABC)$

   c) Calculer l'aire du triangle ABC

3) Soit le point $G(x\,,y\,,z)$ tel que $2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

   a) Déterminer les coordonnées du point G

   b) On pose : $\Delta=\{M(x\,,y\,,z)\text{ tel que : }2\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MC}=\vec{0}\ \}$

Montrer que Δ est une droite que l'on caractérisera

4) Soit le plan $Q: y - z + 2 = 0$

   a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires

   b) Soit $\Delta' = P\cap Q$. Donner une représentation paramétrique de Δ'

Exercice 3

On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1,0,2) , B(0,0,1), C(0,-1,3) et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

1) a) Vérifier que E a pour coordonnées (0,2,3).

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.

2) a) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $x - 2y - z + 5 = 0$. Montrer que $\mathscr{P}$ est parallèle à (ABC).

b) Soit K le point défini par : $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathscr{P}$.

3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Le plan $\mathscr{P}$ coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J. Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

Exercice 4

On considère les points $A(-1,1,3)$, $B(2,1,0)$ et $C(2,-1,2)$

1) a) Montrer que les ponts A, B et C ne sont pas alignés

b) On note P le plan (ABC) . Montrer qu'une équation cartésienne de P et $x+y+z-3=0$

2) a) Soit Q le plan médiateur de $[AB]$ Montrer qu'une équation cartésienne de Q et $x-z+1=0$

b) On note D la droite d'intersection de P et Q. Trouver une équation cartésienne de D

3) Soit $S=\left\{M(x,y,z)\in \xi \text{ tel que } MB^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}=0\right\}$

a) Vérifier que $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

b) En déduire que S est une sphère de centre $I(2,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

c) Montrer que le plan Q est tangent à S en un point H dont on déterminera les coordonnées

4) Soit $S_m=\left\{M(x,y,z)\in \xi \text{ tel que } x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2(m+3)z+5m-10=0\right\}$; $m\in$ IR

a) Montrer que S_m est une sphère de centre $\Omega_m(m,m,m+3)$ et dont on déterminera le rayon R_m

b) Que décrit le point Ω_m lorsque m décrit IR

c) Discuter selon m la position relative de S_m et P

Exercice 5

On considère les points $A(-\sqrt{2},1,0)$ et $B(0,0,-\sqrt{2})$ et le plan P d'équation cartésienne
P : $x-y-z+\sqrt{3}=0$.

1) a) Montrer que la droite (AB) n'est pas perpendiculaire à P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q passant par A et B et perpendiculaire au plan P est Q : $x+z+\sqrt{2}=0$.

2) On désigne par (S) la sphère de centre O et tangente à P.

a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).

b) vérifier que le plan Q est tangent à la sphère (S).

c) Soient I et J les points de contacts de la sphère (S) avec les plans P et Q. Montrer que IJ=$\sqrt{2}$.

3) Soit (S_m) l'ensemble des points M(x ;y ;z) de l'espace ξ vérifiant :

$$x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$$

a) Montrer que l'ensemble(S_m) est une sphère dont on donnera le centre I_m et le rayon R_m.

b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans IR.

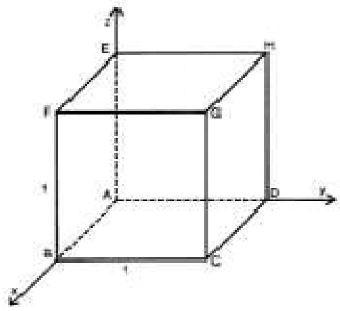
c) Montrer que toutes les sphères (S_m) passent par un cercle fixe (ζ), contenue dans le plan P, qu'on donnera le centre H et le rayon r.

Exercice 6

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}$ est égale à :

a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$

2) Une équation du plan (ECG) est :

a) $x+y-2=0$ b) $x+y-1=0$ c) $x-y=0$

3) On désigne par I le milieu du segment $[EG]$.

Soit S la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

a) Le plan (BEG) est tangent à la sphère S.

b) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle de diamètre $[EG]$.

c) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

Exercice 7

On donne le plan P : $2x + y - 2z - 2 = 0$ et les points A(-1,1,3); B(1,2,1); C0,0,-1) et $F(1-\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, 1-2\sqrt{3})$.

1) a) Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire à P en B.

b) Vérifier qu'une équation du plan Q passant par A,B et C est 2x-2y+z+1=0

2) Soit (Γ) le cercle dans le plan P de centre B et de rayon $3\sqrt{3}$.

a) Vérifier que le point $F \in (\Gamma)$.

b) Donner un système d'équation paramétrique de la droite (D) perpendiculaire à Q en F.

c) Montrer que (D) est tangente à (Γ).

3) Soit S la sphère de centre I(3,3,-1) et de rayon 6 et le point J(7,5,-5).

a) Montrer que P coupe S suivant le cercle (Γ).

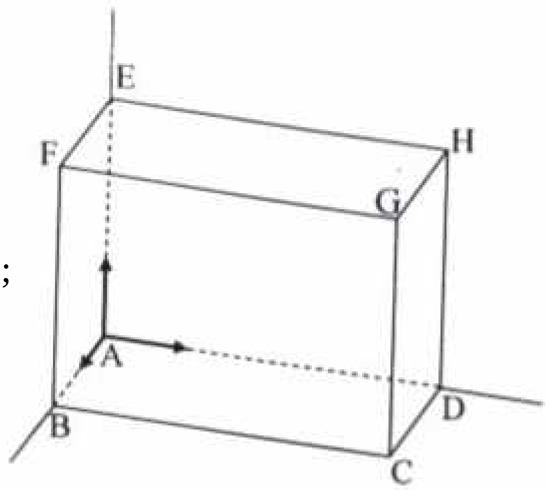
b) Caractériser l'image de S par la translation du vecteur $\overrightarrow{JI}$.

c) Déterminer l'ensemble des points M de S tel que le point N défini par $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IJ}$ appartient à S.

Exercice 8

Soit ABCDEFGH est un parallélépipède tel que

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$



1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit α un réel différent de 1 et $M(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3) Soit V le volume du tétraèdre MEBG.

a) Exprimer V en fonction de α.

b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG.

c) Pour quelles valeurs de α, V est-il égale au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?

Exercice 9

On donne les points A(3,2,4); B(0,3,5);C(0,2,1) et D(3,1,0).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme et calculer son aire.

2) Soit S la sphère de centre I(2,-2,5) et de rayon $3\sqrt{2}$ et P le plan passant par les points A,B et D.

a) Vérifier que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$.

b) Montrer que le plan P est tangent à la sphère S au point A.

Exercice 10

On considère les points A(3,2,6) ; B(1,2,4) et C(4,-2,5).

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) Montrer que OH= $\frac{4}{3}$

3) Soit S la sphère de centre O et passant par A.

a) Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle ξ de centre H.

b) Calculer le rayon du cercle ξ.

Exercice 11

On considère la droite Δ passant par le point $A(-3,-1,-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ et la droite D passant par le point $B(3,2,3)$ et vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

1) a) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$.

b) Justifier que les droites Δ et D sont orthogonales et non coplanaires.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à D.

2) Soit S la sphère de centre $C(-1,0,-1)$ et de rayon 6 et P le plan d'équation $2x + y + 2z + 13 = 0$.

a) Montrer que S et P se coupent suivant un cercle de centre A. Déterminer le rayon de ce cercle.

b) Montrer que la droite D est tangente à la sphère S au point B.

3) a) Calculer alors AB. En déduire que le point C appartient au segment $[AB]$.

b) Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites D et Δ.

Exercice 12

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ et $C(1,-1,1)$.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CC}$. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x+y+z-1=0$.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de ξ tel que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.

b) Montrer que $S \cap P$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

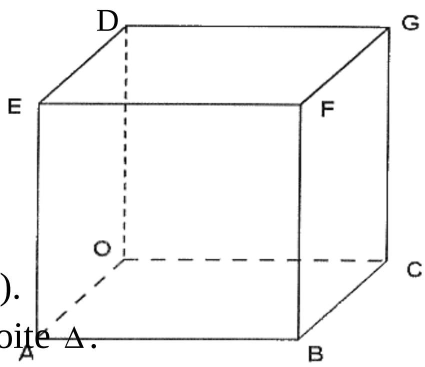
b) Soit α un réel et soit M un point de ξ de coordonnées $(\alpha, 0, 2-\alpha)$.

Montrer que, lorsque α décrit l'ensemble IR, le volume du tétraèdre MABC reste constant.

Exercice 13

Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.



1) a) Déterminer les composantes $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est $x+y+z-1=0$.

2) Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite de la droite Δ.

b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de Δ et du plan (ACD).

3) Pour tout réel m, on désigne par S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2mz-1+3m^2=0$

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et de rayon r.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par le point A.

4) Vérifier que les centres des sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ sont deux points de la droite Δ.

b) Justifier que le plan (ACD) coupe les deux sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ suivant un même cercle qu'on précisera.