EQUTIONS DIFFERENTIELLES 4ème Mathématiques

Exercice 1

Résoudre dans IR les équations différentielles suivantes :

$y' - 2y = 0$; $y' - 3y = 0$; $4y' + 3y = 0$; $2y'' + y' = 0$; $2y' + 3y + 1 = 0$; $2y' - y + 2 = 0$,
$y'' + y' + 2 = 0$; $4y'' + 9y = 0$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E)\colon y' - y = -(x-1)^2$.

1) Soit la fonction g définie sur IR par :$g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels a, b et c pour que g soit une solution de l'équation (E).
2) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0)\colon y' - y = 0$.
3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).
4) Déterminer alors les solutions de (E) .

Exercice 3

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$
2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur IR telles que pour tout $x \in IR$; $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   a) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E.

   b) Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

   c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

   d) Déterminer alors l'ensemble E.

Exercice 4

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - y = \dfrac{e^{2x}}{1 + e^x}$

1) Déterminer la solution de l'équation : $y' - y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0
2) Soit f et g deux fonctions dérivables sur IR ; tel que $f(0) = \ln 2$ et $f(x) = e^x g(x)$

   a) Calculer $g(0)$

   b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$

3) a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

   b) En déduire l'expression de g puis celle de f de telle sorte que f soit une solution de (E)

Exercice 5

On considère les fonctions f dérivables sur IR, admettant une dérivée seconde et vérifiant :
$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et pour tout x de IR : $y'' + 3y' + 2y = 0$ (y'' est la dérivée seconde de y)

1) On pose $\forall x \in IR\ :\ g(x) = e^{x} f(x)$

a) Calculer $g(0)$ et $g'(0)$

b) Montrer que g admet sur IR une dérivée seconde et que $\forall x \in IR\ :\ g''(x) = -g'(x)$

c) En déduire que g est solution de l'équation différentielle : $g'(x) = 1 - g(x)$

d) Exprimer alors $g(x)$ en fonction de x

2) Montrer qu'il existe une et une seule fonction f vérifiant les hypothèses de l'exercice et expliciter f(x)

Exercice 6

On considère les équations différentielles :

$(E_0): (1+e^x)y' - y = 0$ et $(E): (1+e^x)y' - y = e^{2x}$

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ Montrer que g est une solution de (E) sur IR.

2) Soit f une fonction dérivable sur IR. Montrer que f est une solution de (E) si est seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).

3) On pose $z = (1+e^x)y$

a) Montrer que si y est une solution de (E_0) sur IR alors z est une solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.

b) En déduire que les solutions de (E) sur IR sont les fonctions f définies par : $f(x) = \frac{ke^x + e^{2x}}{1+e^x}$; $k \in IR$.

4) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x}{1+e^x}$ Etudier les variations de f.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0\,,+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h, expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

6) a) Tracer dans le même repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ les courbes de f et de h^{-1}.

b) Calculer $\int_{-1}^{0} \ln\left(3 + x + \sqrt{x^2 + 10x + 9}\right) dx$

Exercice 7

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y - e^x + 1 = 0$. On pose $z = y - xe^x - 1$.

1) a) Montrer que z vérifie l'équation différentielle $(E') : z' = z$.

b) Déterminer alors z en fonction de x.

2) Déduire que la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (x-1)e^x + 1$ est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

3) Soit (C) la courbe représentative de f dans en repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

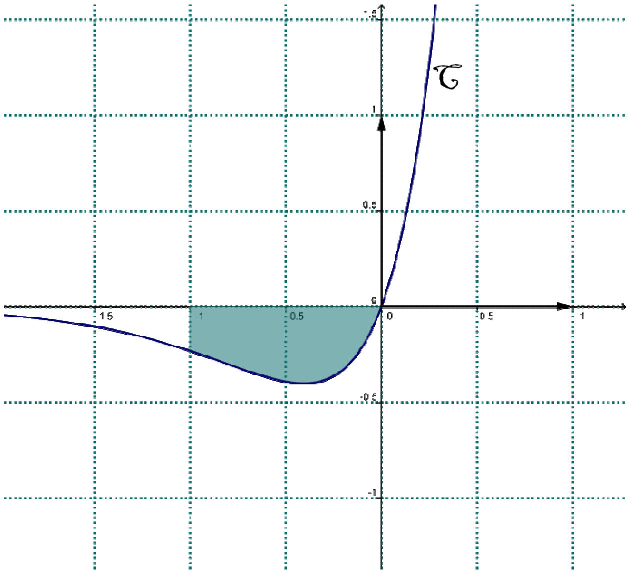
a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (Δ) à (C).

b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ).

4) a) Vérifier, en utilisant la question 2, que pour tout réel x on a : $f(x) - 1 = f'(x) - e^x$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 8



On considère les équations différentielles

$(E_0) : y' - 3y = 0$ et $(E) : y' - 3y = e^{2x+1}$

et la courbe $\mathscr{C}$ ci-contre d'une solution f de (E) définie sur IR.

1) Résoudre l'équation (E_0).

2) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x+1}$ est une solution de (E).

3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).

4) En déduire les solutions de (E).

5) a) Expliciter alors $f(x)$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan colorée sur la figure.

Exercice 9

1) Résoudre les équations différentielles $(E): y' + y\ln 2 = \ln 2$ et $(E') : y'' + \pi^2 y = 0$

2) On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions f et g solutions des équations (E) et (E'). Expliciter $f(x)$ et $g(x)$.

3) Calculer l'aire de la partie du plan colorée sur la figure 2.

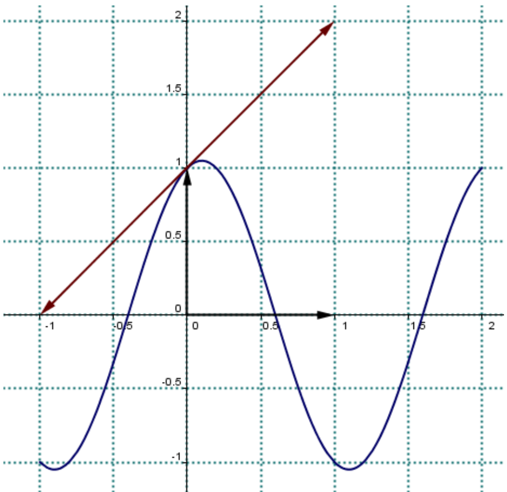


Fig 1

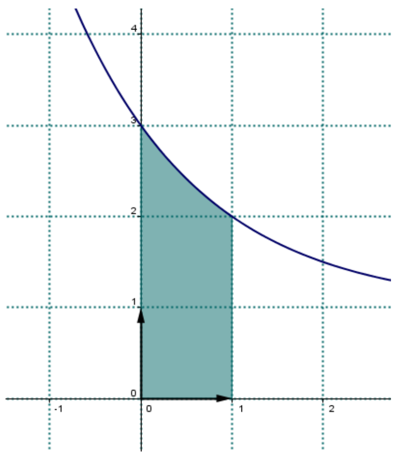


fig 2

Exercice 10

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle $(E): xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$.

1) a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle

$]0\ ,\ +\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'=2y+8$.

b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x)=xh(x)$ est solution de (E).

2) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E),

3) Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2\ ,0)$? Si oui la préciser.

Exercice 11

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+2y=x^2$

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y'+2y=0$

2) Soit $g(x)=ax^2+bx+c$, Déterminer les réels a, b et c tel que g soit solution de (E)

3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est solution de (E')

4) En déduire les solutions de (E)

Exercice 12

Soit l'équation différentielle (E) : $y'-y=4\cos x$

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y'-y=0$

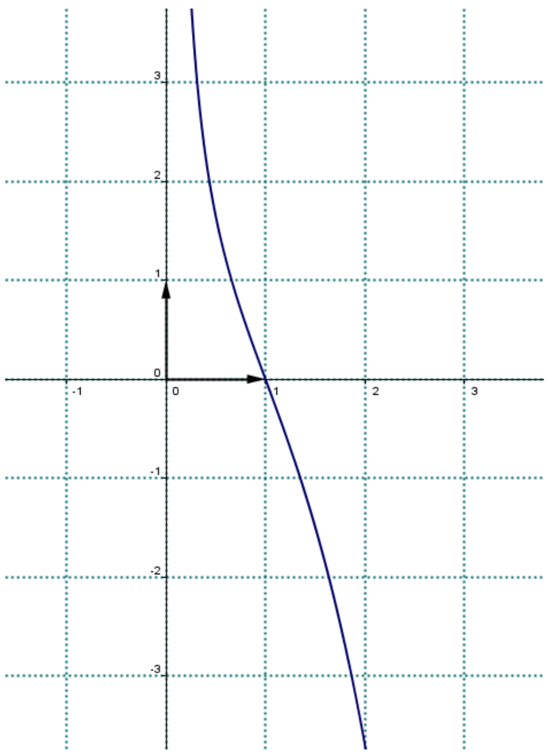
2) Soit $g(x)=a\cos x+b\sin x$, Déterminer les réels a et b tel que g soit solution de (E)

3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est solution de (E')

4) En déduire les solutions de (E)

Exercice 13

Soit l'équation différentielle (E) : $y-y'=\dfrac{e^x}{x^2}$ $\quad x\in\ ]0\ ,\ +\infty[$ et la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre d'une solution f de (E) définie sur $]0\ ,\ +\infty[$



1) a) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y-y'=0$

b) On donne $\forall x\in\ ]0\ ,\ +\infty[\ \ g(x)=\dfrac{x+1}{x}e^x$.

Montrer que g est une solution de (E)

2) Montrer que f est solution de (E)

si et seulement si $f-g$ est une solution de (E')

3) En déduire les solutions f de (E) sur $]0\ ,\ +\infty[$

4) Expliciter alors $f(x)$.