Lycée 2 Mars 34 Ksar Hellal | Devoir de contrôle n° 3 | 4ème M

Prof Mr Boudhaouia | Durée : 2 h | Le 22/04/2010

Exercice 1 (5 points)

1) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 + xe^x$.

a) Etudier les variations de g sur IR.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur IR.

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + e^x(x-1)$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) Etudier les variations de f sur IR.

b) Montrer que la droite $D : y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et préciser sa tangente au point d'abscisse 1.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR.

b) Tracer dans le même repère la courbe $\mathcal{C}$' de la fonction f^{-1} réciproque de f.

c) Calculer la mesure $\mathcal{A}$ de l'aire du domaine plan :

$\mathcal{D} = \{M(x\,,y) \in P / -1 \le x \le 0 \; et \; 0 \le y \le f^{-1}(x)\} \cup \{M(x\,,y) \in P / 0 \le x \le 1 \; et \; x \le y \le f^{-1}(x)\}$

Exercice 2 (5 points)

Soit la suite U définie sur IN^* par : $U_n = \int_0^1 e^{-x}(x-1)^n \, dx$

1) a) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $U_{n+1} - (n+1)U_n = (-1)^{n+1}$.

b) Calculer U_1 et U_2.

2) Pour tout $n \in IN^*$ on pose : $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a) Montrer que $\forall n \in IN^{*}$ on a : $\frac{e^{-1}}{2n+1} \leq V_n \leq \frac{1}{2n+1}$

b) Montrer que $\forall n \in IN^{*}$ on a : : $\frac{-1}{2n+2} \leq W_n \leq \frac{-e^{-1}}{2n+2}$

c) Déterminer alors la limite de la suite .

3) a) Montrer que les suite V et W sont monotones.

b) Montrer que les suite V et W sont adjacentes.

<u>Exercice 3 (5 points)</u>

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, o n considère les points $A(3,0,1)$; $B(0,-1,2)$ et $C(1,-1,0)$.

1) a) Déterminer les coordonnées du vecteur : $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.

2) Soit le point $D(1,1,-2)$.

a) Vérifier que $D \notin \mathcal{P}$.

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

3) a) Définir paramétriquement la droite Δ passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{N}$.

b) Calculer les coordonnées du point H d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$.

c) Déduire la distance du point D au plan $\mathcal{P}$.

4) a) Calculer les coordonnées du point D' symétrique de D par rapport à $\mathcal{P}$.

b) Déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ image de $\mathcal{P}$ par l'homothétie de centre D et de rapport 2.

Exercice 4 (5 points)

1) On considère l'équation (E): $8x + 5y = 1$; où $(x\,,y) \in Z^2$.

a) Donner une solution particulière de (E).

b) Résoudre dans Z^2 l'équation (E).

2) Soit n un entier naturel tel qu'il existe deux entiers naturels a et b vérifiant :

$n = 8a + 1$ et $n = 5b + 2$

a) Montrer que $(a\,,-b)$ est une solution de (E).

b) En déduire le reste modulo 40 de n.

3) a) Résoudre dans Z^2 l'équation $8x + 5y = 100$.

b) Un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge; les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?