Lycée 2 Mars 34 Ksar Hellal *Devoir de contrôle n° 3* *4ème M*

Prof Mr Boudhaouia *Durée : 2 h* *Le 20/04/2012*

Exercice 1 (5 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$

2) Soit E l'ensemble des fonctions f définies et deux fois dérivables sur IR telles que pour tout $x \in IR$; $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E.

Exercice 2 (7 points)

Soit la fonction f définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$; $\mathcal{C}$ est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2) Soit F la fonction définie sur $]0\,,\ 1]$ par : $F(x) = \int_1^{1+(\ln x)^2} f(t)\,dt.$

a) Montrer que F est dérivable sur $]0\,,\ 1]$ et que $\forall x \in\,]0\,,\ 1]$; $F'(x) = 2\ln x$.

b) En déduire $F(x)$ en fonction de x.

3) Pour tout réel $\alpha > 1$, on désigne par $S(\alpha)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limité par $\mathcal{C}$ et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 1$ et $x = \alpha$.

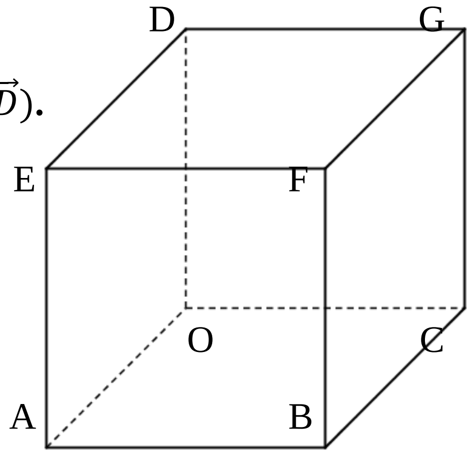
a) Montrer que $S(\alpha) = F(f(\alpha))$.

b) Calculer $S(\alpha)$ en fonction de α.

c) Calculer $\lim_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)$.

Exercice 3 (8 points)

Dans la figure ci-contre $OABCDEFG$ est un cube d'arête 1.



On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$.

b) Déterminer le volume du tétraèdre $ACGD$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).

2) Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .

b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de Δ et du plan (ACD).

3) Pour tout réel m, on désigne par S_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0$

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par le point A.

4) a) Vérifier que pour tout réel m le point I_m appartient à la droite Δ.

b) Montrer que le plan (ACD) coupe les deux sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ suivant un même cercle qu'on déterminera.

c) Etudier suivant les valeurs de m, l'intersection du plan (ACD) et la sphère S_m.