Devoir de contrôle # 3
$4^{\text{ème}}$ Math$_1$

Lycée Hamouda Pacha
Année scolaire : 2012-2013
Durée 2 h **Pr: Ben Fredj. S**

N.B

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. (4 points). Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1– Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, la transformation qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe $i\overline{z}+1$ est une symétrie orthogonale.

2– Dans le plan orienté on donne un triangle équilatérale ABC.

Si σ est l'isométrie du plan qui envoi respectivement A, B et C respectivement en B, C et A alors σ est un antidéplacement.

Exercice 2. (6 points). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = 1 + 31 + 31^2 + ... + 31^{n-1}$$

1– Vérifier que $S_{2013} - 31 \times S_{2012} = 1$ puis déduire que 31 et S_{2013} sont premiers entre eux.

2– Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\quad 30 \times S_n = 31^n - 1$.

3– (a) Vérifier que $31^{2013} \equiv 1 \left(\textbf{mod}\, S_{2013}\right)$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $31x \equiv 1 \left(\textbf{mod}\, S_{2013}\right)$.

4– On admettra que 2011 est premier.

(a) Démontrer que si n est premier et $n \geq 7$ alors n divise $S_n - 1$.

(b) Déterminer le reste modulo 2011 du nombre S_{2013}.

Exercice 3. (4 points). Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par :

$f(x) = \sqrt{-\ln(x)}$.On note C la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1– Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2– α étant un réel de l'intervalle $]0,1[$. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note $\mathscr{V}\alpha$ le volume (en unité de volume) du solide engendré par la rotation de l'arc défini par les points M du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ de coordonnées (x,y) tels que $\alpha \le x \le 1$ et $0 \le y \le f(x)$.

Montrer que $\mathscr{V}\alpha = \pi\Big(1-\alpha+\alpha\ln\alpha\Big)$ puis calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \mathscr{V}\alpha$.

Exercice 4. (6 points).

1– Soit u la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - 1 - x$.

(a) Étudier le sens de variation de u puis déduire que pour tout réel x, $u(x) \ge 0$.

(b) Déduire que pour tout réel $x > 0$, $e^{-x} \le \dfrac{1}{1+x}$

(c) Montrer que pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \ge 1$,

$$1 - \frac{1}{nx} \le e^{-\frac{1}{nx}} \le 1 - \frac{1}{1+nx}$$

2– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_1^2 \Big(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\Big)dt$ et $V_n = nU_n$.

(a) Montrer que pour tout $n \ge 1$, $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \le U_n \le \dfrac{\ln 2}{n}$.

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

3– n étant un entier naturel non nul. Pour tout réel $x \ge 1$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_n^{nx} g(t)dt$ où g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(t) = 1 - e^{-\frac{1}{t}}$.

(a) Vérifier que pour tout réel $x \ge 1$ $F'_n(x) = n\Big(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\Big)$.

(b) Calculer $F_n(1)$ puis déduire que $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_n^{2n} g(t)dt$.

(c) Interpréter graphiquement les termes de chacune des suites (U_n) et (V_n).