Série d'exercices # 1

Bac maths

Thèmes : Intégration

Pr : Ben Fredj Sofiane

Groupe Bac math sur facebook

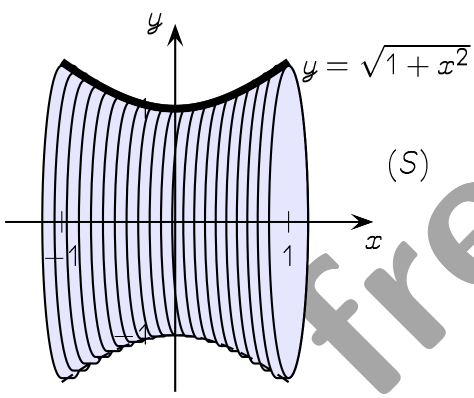
Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

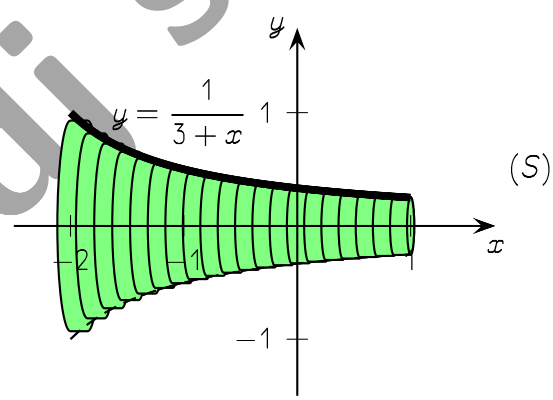
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx,\ \int_{1}^{2} \frac{x^2}{(1+x^3)^3}dx,\ \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt, \text{ et } \int_{-2}^{2} \frac{\sin(t)}{1+t^2}dt.$$

Exercice 2. A l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales :

$$\int_0^{\pi} t\cos(t)dt,\ \int_0^1 t^3\sqrt{1+t^2}dt$$

Exercice 3. L'espace est rapporte à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer le volume de chacun des solides représentés ci-dessous.





Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_0^1 \sqrt{1+t^n}dt$.

1− Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$, on a : $1 \le \sqrt{1+t^n} \le 1 + \frac{t^n}{2}$.

2− Montrer que pour tout $n \ge 0$, on a : $1 \le U_n \le 1 + \frac{1}{2(n+1)}$.

3− Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

4− Pour tout $n \ge 0$, on pose $V_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t^n}dt$.

(a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $V_n = \frac{4\sqrt{2}}{2+3n} - \frac{2U_n}{2+3n}$.

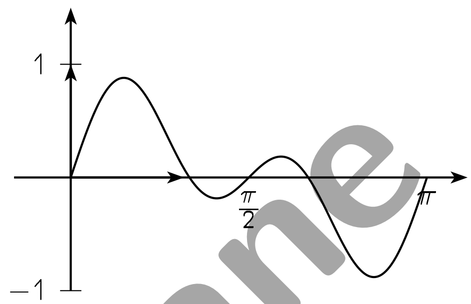
(b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nV_n$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = \mathbf{sin}\,(3x)\,\mathbf{cos}\,(x)$ et on donne dans la figure ci dessous sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1— Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2— (a) Développer puis simplifier :
$$\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}\right) \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right).$$

(b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{sin}\,(3x) \times \mathbf{cos}\,(x)dx$ et interpreter graphiquement le résultat obtenu.



3— Calculer l'aire de la partie limitée par (C_f) et les droites d'équations respectives $y = 1$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6. .

1— Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\mathbf{tan}\,x} \frac{t^2}{1+t^2}dt$ où $x \in I$ avec $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Montrer que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $F'(x) = \mathbf{tan}^2 x$

(b) Déduire que pour tout réel $x \in I$, $F(x) = \mathbf{tan}\,x - x$.

(c) Calculer alors l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt$.

2— Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 2[$ par : $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de φ.

x	0		2
$\varphi'(x)$	‖	$+$	‖
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

(a) Étudier la position de (C) par rapport à la droite D d'équation $y = x$ puis tracer (C) et D.

(b) Montrer que φ possède une fonction réciproque φ^{-1} définie et continue sur un intervalle J que l'on précisera. Tracer (C') la courbe de φ^{-1}.

(c) Montrer que pour tout réel $y \in J$, $\varphi^{-1}(y) = \dfrac{y^2}{1+y^2}$.

(d) Calculer en unité d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C) et (C').

3— **Facultatif**. Pour tout $n \geq 1$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{2n-k}}$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} U_n = \int_0^1 f(t)dt$.