Série d'exercices
Bac maths

Thèmes : Arihmétiques
Division dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1. VRAI ou FAUX, en justifiant la réponse.

1— a, b, c sont des entiers naturels non nuls.

(a) Si le reste de la division euclidienne de a par b et 2 et celui de c par b est 3 alors le reste de la division euclidienne de $a+c$ par b est 5.

(b) Si le reste de la division euclidienne de a par b et 1 et celui de c par b est 1 alors le reste de la division euclidienne de ac par b est 1.

2— Pour tout entier n tel que $n \geq 3$, on a :

(a) $n^2 - 1$ n'est jamais premier.

(b) $n^2 + 4$ n'est jamais premier.

3— a, b sont deux entiers naturels tels que $a \equiv 2 \pmod{10}$ et $b \equiv 2 \pmod{10}$, alors :

(a) $a \equiv b \pmod{5}$.

(b) $a^5 \equiv a \pmod{10}$.

(c) $a + b + 6 \equiv 0 \pmod{10}$.

(d) $3^a \equiv 3^b \pmod{10}$.

Exercice 2. On admettra la propriété ci dessous :

> a, b sont deux entiers naturels tel que $b \neq 0$.
> a est compris entre deux multiples consécutifs de b.

Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tel que $a = bq + r$.

Exercice 3. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $ab = a + b$.

Exercice 4. Déterminer les entiers n tels que $3n + 4$ divise $13n - 21$.

Exercice 5. Démontrer que pour tout entier naturel n, 6 divise $n^3 + 5n$. On remarquera que $5 \equiv -1 \pmod{6}$.

Exercice 6. Les entiers naturels a et b sont tels que $a^2 - b^2$ est un nombre premier. Montrer que a et b sont consécutifs.

Exercice 7. .

1. n, k dont deux entiers relatifs. Montrer que si k est une racine du polynôme n^3+8n^2+8n+7 alors $k|-7$.

2. Déduire les racines entières du polynôme $P : n \mapsto n^3+8n^2+8n+7$.

Exercice 8. .

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  q EST_DU_TYPE NOMBRE
  r EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  q PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (b*q<=a) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    q PREND_LA_VALEUR q+1
    FIN_TANT_QUE
  q PREND_LA_VALEUR q-1
  r PREND_LA_VALEUR a-b*q
  AFFICHER q
  AFFICHER r
FIN_ALGORITHME
```

1— L'algorithme ci-contre fait sous Algobox. Que calcule-il?

2— Tester-le.

Exercice 9. L'année 2013 a débuté par un mardi.

1— Calculer N le nombre de jours qui séparent sa propre naissance, du 1$^{\text{èr}}$ janvier 2013.

Attention Tous les quatre ans, il y a une année bissextile qui compte 366 jours.

2— Calculer le reste de la division euclidienne de N par 7. Expliquer le choix du nombre 7.

3— En déduire le jours de sa propre naissance.

Exercice 10. Déterminer selon les valeurs de n le chiffre des unité de $11^n+9^n+5^n$.

Exercice 11. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : n^2+n+7 \equiv 0 (\textbf{mod } 13).$$

1—• Vérifier que 2 est solution de (E).

2—• Résoudre (E).

Exercice 12. n étant un entier.

1—• Déterminer les restes modulo 7 des nombres 2^n et 3^n.

2—• Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2^n+3^n \equiv 0 (\textbf{mod } 7)$

Exercice 13. On considère la suite (N_k) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$N_1 = 1,\ N_2 = 11,\ N_3 = 111 \text{ et } N_k = \underbrace{111...1}_{k\,\text{chiffres}}$$

1—• Soit p un entier premier tel que $p > 7$, montrer que p divise N_{p-1}

2—• Montrer que : 41 divise N_k si et seulement si, 5 divise k

Exercice 14. x, y sont des entiers naturels.

1—• Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel y, le reste modulo 9 du nombre $y! + 2001$

2—• Déterminer tous les couples d'entiers positif (x, y) tels que :

$$x^2 - y! = 2001$$

Exercice 15. On note $M_p = 2^p - 1$ où p est un nombre premier tel que $p > 2$.

Soit q un facteur premier de M_p.

1—• Quelle est la parité de q.

2—• Démontrer que p est le plus petit entier supérieur à 1 vérifiant :

$$2^p \equiv 1 (\mathbf{mod}\ q).$$

3—• Démontrer que p divise $q - 1$.

4—• On écrit $q - 1 = p \times m$, avec $m \in \mathbb{N}$.

Démontrer que m est pair et en déduire que $q \equiv 1 (\mathbf{mod}\ 2p)$.

5—• Le nombres M_{17}, M_{19} et M_{23} sont-ils premiers?.

Exercice 16. $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des entiers impairs et premiers, on note :

$$N = \left(a_1 a_2 ... a_n\right)^2 + 1$$

1—• Montrer que $N \equiv 2 (\mathbf{mod}\ 4)$

2—• Peut-on trouver un entier naturel n tel que $N = a^3$? Expliquer.

Exercice 17. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $N = 5 + n!$

1—• Montrer que pour tout $n > 7$, $N \equiv 5 (\mathbf{mod}\ 7)$

2—• Déterminer les entiers naturels tels que $5 + n!$ soit un cube parfait.