INTEGRALES 4ème Sc EXPERIMENTALES

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 (3x^2-2x+1)\,dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^2 x\,dx$; $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2+\tan^2 x)\,dx$; $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}\,dx$; $\int_1^0 (-2x\sqrt{1+x^2})\,dx$

$\int_0^{\pi} (2\sin t+\cos t+3)\,dt$; $\int_0^1 \frac{2v}{\sqrt{v^2+1}}\,dv - \int_3^1 \frac{2v}{\sqrt{v^2+1}}\,dv$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 u}\,du$; $\int_1^0 \frac{x^2}{(1+x^3)^5}\,dx$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin t)\,dt$;

$\int_0^{\pi} t^2 \sin t\,dt$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t-1)\cos t\,dt$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

Exercice 2

On a représenté ci-dessous la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $]1\ ,+\infty[$. Les droites Δ et Δ' d'équations respectives $x=1$ et $y=x-4$ sont des asymptotes à (C). La courbe (C) admet au point d'abscisse 3 une tangente horizontale.

On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), les droites Δ et Δ' et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$.

1) a) Par lecture graphique donner $f'(3)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-4)$ et $\lim_{x\to1^+} f(x)$.

b) Par lecture graphique donner la position relative de (C) et $\Delta'': y=x-3$.

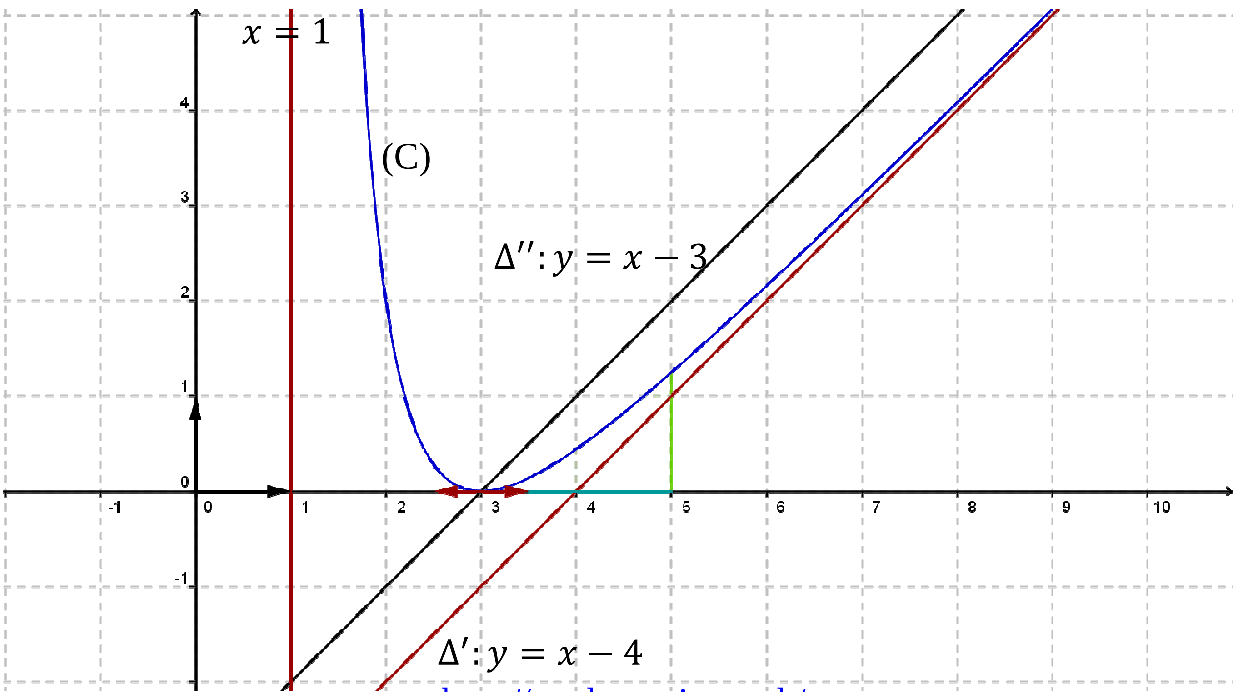
c) En déduire que $A \le 2$.

d) Par des considérations d'aires prouver que $A > \frac{1}{2}$.

3) Soit $J=\int_3^5 xf'(x)\,dx$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$J=5f(5)-A$

3) Sachant que $f(x)=x-4+\frac{4}{(x-1)^2}$; déterminer la valeur de A puis la valeur de .



http://mathematiques.tk/

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^x t\sin t\,dt$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^3 x + \sin^3 x)dx$ $\int_1^0 x^2\sqrt{2x+1}\,dx$; $\int_1^0 x\sqrt{x+1}\,dx$; $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \sin x$

1) Etudier les variation de f et construire sa courbe (C)

2) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$

3) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de A au tour de l'axe des abscisses.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan^2 x$, et soit (C) sa courbe .

1) Etudier f et tracer (C).

2) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$. Calculer A.

3) Soit la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f^2(x) + f(x)$.

 a)Montrer que g admet une unique primitive G qui s'annule en 0.

 b)Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $G(x) = \frac{1}{3}\tan^3(x)$.

4) Calculer le volume V engendré par la rotation de A autour de l'axe des abscisses.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un RON $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a)Dresser le tableau de variation de f

 b)Montrer que $I(-1,-2)$ est un point d'inflexion de (C)

 c)Donner une équation de la tangente T à (C) en I

2) a)Dresser le tableau de variation de f' et en déduire que $\forall t \in IR$ on a : $f'(t) \geq 1$

 b)Montrer en intégrant l'inégalité précédente que $\forall x \in [-1, +\infty[$ et $\forall t \in [-1, x]$ on a $f(x) \geq x - 1$

 d)En déduire la position relative de (C) et T

Exercice 7

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$

1) a) Montrer que $\forall n \in IN \; ; U_n \geq 0$

   b) Montrer que $\forall n \in IN \; ; \; U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$

2) Calculer U_0, U_1 et U_2

3) Montrer que (U_n) est décroissante

4) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 8

Soit la suite (I_n) définie sur IN^* par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$

1) a) Montrer que la suite I_n $(\forall n \in IN^*)$ est à termes positifs

   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante

2) a) Pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $x \in \left[0 \; , \; \frac{\pi}{4}\right]$; calculer la dérivée de la fonction

$g : x \mapsto (\tan x)^{n+1}$

   b) En déduire que $\forall n \in IN^*$ on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

   c) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit (C) sa courbe.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

   b) Dresser le tableau de variation de .

   c) Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on note f^{-1} définie sur $[0 \; , +\infty[$.

   d) Montrer que $\forall x \in [0 \; , +\infty[$, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

   e) Tracer (C) et (C') courbe de f^{-1}.

2) Soit A l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $= 1$.

Montrer que $A = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$

Exercice 10

Déterminer la valeur moyenne sur $[0 \; , \; \pi]$de la fonction $f(t) = \sin t$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(t)=\begin{cases}\cos t & \text{si } 0\leq t\leq\frac{\pi}{4}\\ \sin t & \text{si } \frac{\pi}{4}<t\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$ Montrer que f est continue sur $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

Exercice 12

On pose $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}dt$;

1) Déterminer le domaine de définition de F
2) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur IR
3) On pose $g(x)=F(\tan x)$; $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$

   a) Calculer $g(0)$

   b) Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$

   c) En déduire que $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ $F(\tan x)=x$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ \pi]$ par $f(x)=sin^2x$ et C_f sa courbe.

1) a) Dresser le tableau de variation de .
   b) Tracer C_f .
2) Linéariser sin^2x et sin^4x ($\cos 2x=1-2sin^2x$).
3) Calculer A l'aire de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations :
$x=0$ et $x=\pi$
4) Calculer le volume engendré par la rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses.