Exercice N°1 On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - \sin x$, et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormé (unité graphique : 3 cm).

1°) Calculez la dérivée de f et déduisez –en le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrez que pour tout réel x, $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$. Déduisez –en les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3°) On note D_1 et D_2 les droites d'équations respectives y = 2x-1 et y = 2x+1. Déterminez les points communs à $\mathcal{C}$ et D_1, d'une part, à $\mathcal{C}$ et D_2 d'autre part. Précisez les tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.

4°) Etudiez la parité de f. Qu'en déduisez –vous pour la courbe $\mathcal{C}$?

5°) Comparez $f(x + 2\pi)$ et $f(x)$. Quelle particularité géométrique pouvez-vous en déduire pour $\mathcal{C}$?

6°) Tracez avec précision la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0; \pi]$. Tracez les tangentes aux points 0 et π. Tracez également D_1 et D_2.

7°) Donnez l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[-3\pi ; 3\pi]$.

Exercice N°2 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$.

1°) Calculez les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$.

2°) Etudiez les variations de f_n (distinguez les cas n pair et n impair)

3°) On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

Vérifiez que la droite x = 1 est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_n$ puis que $\mathcal{C}_n$ passe par quatre points dont les coordonnées ne dépendent pas de n. Calculez les coordonnées de ces quatre points.

4°) Tracez dans le même repère $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1$.

Exercice N°3 F est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$F(0) = 0 \text{ et pour tout reel } x,\ F'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

On admet que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de F(x). On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormé R .

1°) G est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = F(x) + F(-x)$.

a) Justifiez que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $G'(x)$ pour tout réel x.
b) Calculez G(0) et déduisez –en que F est une fonction impaire.

2°) H est la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par : $H(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$.

a) Justifiez que H est dérivable sur I et calculez H ' (x) pour tout réel x dans I.
b) Démontrez que pour tout x dans I, H(x) = 2 F(1).
c) Déduisez –en que la limite de la fonction F en $+\infty$ est 2 F(1).
d) Qu'en déduisez-vous pour la courbe $\mathcal{C}$?

3°) T est la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $T(x) = F(\tan x) - x$.

a) Calculez $T'(x)$. Qu'en déduisez-vous pour la fonction T ?
b) Calculez F(1).

4°) Dressez le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.

5°) Tracez la courbe $\mathcal{C}$, ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses -1, 0 et 1.

6°)a) Montrez que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracez la courbe de F^{-1} dans le même repère orthonormé R .