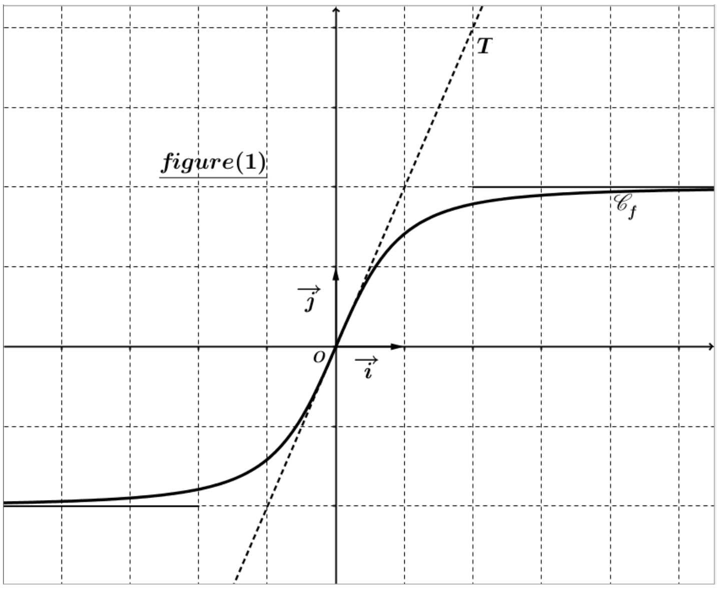
Thèmes abordés :

- ✓ *Lecture graphique.*
- ✓ *Fonctions composées :limites et dérivation.*
- ✓ *Bijection et réciproque.*

Exercice1

Dans le graphique désigné par **figure(1)** *,$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*



- *Les droites d'équations $y=-2$ et $y=2$ sont des asymptôtes à $\mathscr{C}_f$ respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.*
- *La droite T est tangente à $\mathscr{C}_f$ en O.*

1. **a.** *justifier que f est impaire.*
b. *Dresser le tableau de variation de f.*
c. *Donner le tableau de signe de f.*
d. *Déterminer $f'(0)$.*

2. *On admet que f est définie par $f(x)=2.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.*

a. *Justifier par le calcul la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T. Conclure .*

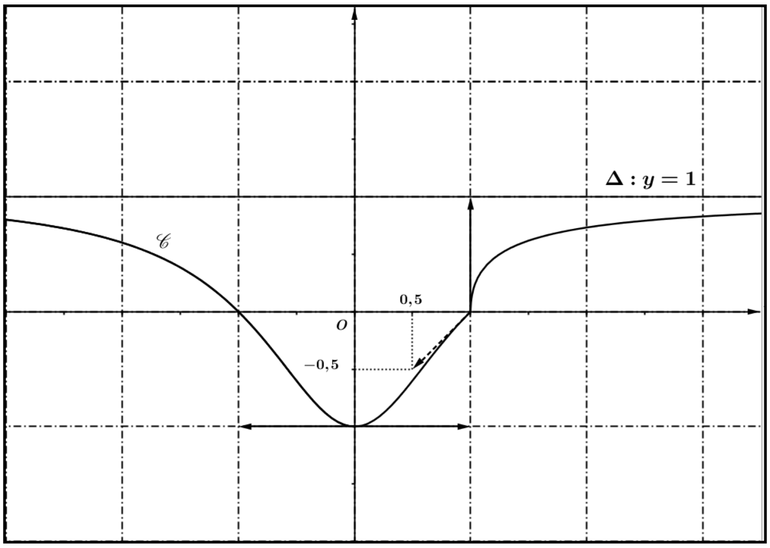
b. *Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=2.\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.*

c. *Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-2,2[$ et costruire la courbe de f^{-1}ainsi que ses asymptôtes.*

d. *Montrer que f^{-1}est dérivable sur $]-2,2[$ et vérifier que $(f^{-1})'(\sqrt{3})=4$.*

Exercice2(D'après la revue omar Khayem N°101)

Dans le graphique ci-contre C désigne la courbe dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ .La courbe C admet :



- *au point de coordonnées (0,-1) une tangente horizontale.*
- *au point de coordonnées (1,0) une demi-tangente oblique et une demi-tangente verticale.*
- *une asymptôte d'équation y =1 en $+\infty$ et en $-\infty$.*

A) *On répondra par simple lecture graphique.*

1. *Donner :* **a)** $f(0)$, $f'(0)$ *et* $f'_g(1)$.

b) $\lim\limits_{-\infty} f$; $\lim\limits_{+\infty} f$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

c) *le tableau de variation de f.*

d) *l'ensemble de définition de la fonction* $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

2. *Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par f :* $\left]-1,1\right]$; $\left]-\infty,1\right[$ *et* $\mathbb{R}$.

B) *On admettra dans la suite que* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+1} & si\ \ x<1.\\ 1-x+\sqrt{x^2-1} & si\ x\geq 1.\end{cases}$ *et on n'utilisera pas* **A).**

1. **a/** *Calculer* $\lim\limits_{-\infty} f$ *et* $\lim\limits_{+\infty} f$ **.**

b/ *Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en* 1 *et interpréter les résultats.*

c/ *Expliciter* $f'(x)$ *sur* $\left]-\infty,1\right[$ *et sur* $\left]1,+\infty\right[$.

2. *Soit g la restriction de f à l'intervalle* $\left]-\infty,0\right]$.

a/ *Justifier que g est une bijection de* $\left]-\infty,0\right]$ *vers un intervalle J que l'on précisera.*

b/ *Tracer dans un même repère la courbe C*g *et celle de* g^{-1}.

c/ *Justifier graphiquement que* g^{-1} *n'est pas dérivable à droite en* -1.

d/ *Expliciter* $g^{-1}(x)$ *pour* $x\in J$

C) *On considère la fonction h définie sur* $\left]0,1\right]$ *par* $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a/ *Montrer que h est prolongeable par continuité à droite en 0 et définir ce prolongement.*

b/ *Montrer que h est dérivable sur* $\left]0,1\right[$ *et calculer* $h'(x)$.

Exercice3

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ *et telle que* $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

1. *Montrer que la fonction* $u: x\mapsto \tan x$ *est une bijection de* $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ *vers* $\mathbb{R}$.

2. *On pose* $h=f\circ u$. *Montrer que h est dérivable sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ *et que* $h'(x)=1\ \forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. *On pose* $s(x)=f(x)+f(-x)$.

a. *Montrer que s est une fonction constante.*

b. *Montrer que si* $f(0)=0$ *alors f est impaire .*

4. *Soit k la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $k(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. *Montrer que k est une fonction constante.*

b. *Montrer que si* $k(x)=2\ \forall x\in\mathbb{R}^*$ *alors* $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.