GEOMETRIE DANS L'ESPACE   4ème Sc Expérimentales

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Exercice 1

On considère les points $A(1,0,1)$, $B(2,0,0)$ et $C(0,2,-1)$

1) Montrer que A, B, et C ne sont pas alignés
2) On pose $\vec{U}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
   a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{U}$
   b) Calculer l'aire du triangle ABC
3) Soit le point $D(-1,-3,-1)$. Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
4) a) Calculer $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$
   b) En déduire le volume du tétraèdre ABCD

Exercice 2

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(1,-1,1)$ et $C(-2,0,1)$

1) a) On pose $\vec{U}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
   a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{U}$
   b) Donner une équation cartésienne du plan $P=(ABC)$
   c) Calculer l'aire du triangle ABC
2) Soit le point $G(x,y,z)$ tel que $2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
   a) Déterminer les coordonnées du point G
   b) On pose : $\Delta=\{M(x,y,z)$ tel que : $2\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MC}=\vec{0}\ \}$

Montrer que Δ est une droite que l'on caractérisera

3) Soit le plan $Q: y-z+2=0$
   a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires
   b) Soit $\Delta'=P\cap Q$. Donner une représentation paramétrique de Δ'

Exercice 3

On considère les plans $P: 2x-y+2z-2=0$ et $Q: -2x+y-2z-7=0$

1) Montrer que P et Q sont parallèles
2) On considère les points $A(1,2,1)$, $B(1,0,0)$, $C(-1,-6,-1)$ et $D(-1,-4,0)$
   a) Vérifier que A, B et C appartiennent à P
   b) Montrer que ABCD est un parallélogramme et en déduire que $D\in P$
   c) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et en déduire que ABCD est un rectangle
3) Soient A', B', C' et D' les projetés orthogonaux respectivement de A, B, C, et D sur Q
   a) Déterminer les coordonnées de A', B', C' et D'
   b) Montrer que ABCDA'B'C'D' est un parallélépipédique
   c) Calculer le volume de ABCDA'B'C'D'

Exercice 4

On considère les points $A(1,-2,-1)$, $B(3,-3,-2)$ et $C(0,-3,1)$

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)
   b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (AB)
2) a) Montrer que les points A, B et C forment un plan P
   b) Donner une représentation paramétrique de P
   c) Donner une équation cartésienne de P
3) Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par $D(1,1,1)$
4) Soit le plan $P': -x+2y-2z+4=0$. Montrer que P et P' sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection

Exercice 5

On considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,2,1)$ et $C(1,3,3)$

1) a) Montrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés
   b) Donner un vecteur normal au plan P contenant les points A, B et C
   c) En déduire une équation cartésienne du plan P
   d) Déterminer une représentation paramétriques de la droite D passant par le point A et perpendiculaire à P
2) On considère les plans $P_1 : x-2y+2z-1=0$ et $P_2 : x-3y+2z+2=0$
   a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants
   b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 ; Montrer que le point C appartient à la droite Δ et que le vecteur $\vec{U}=2\vec{i}-\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ
3) Calculer la distance du point A à la droite Δ
4) On désigne par Q le plan perpendiculaire à la droite Δ et passant par le point A
   a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q
   b) Montrer que le point $H(\frac{7}{5}, 3, \frac{14}{5})$ est le projeté orthogonal du point A sur Δ
   c) Retrouver la distance du point A à la droite Δ

Exercice 6

On considère les plans $P : x-z=0$ et $Q : x-y+z-1=0$

1) a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires
   b) On désigne par $D = P\cap Q$,donner une représentation paramétrique de D
2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\Delta : \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2 \\ z=1-\alpha \end{cases} ;(\alpha\in IR)$
   a) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan P et déterminer les coordonnées du point A intersection de Δ et P
   b) Soit H le projeté orthogonal de A sur Q. Montrer que la droite (AH) est incluse dans P
3) Soit M un point quelconque de Δ et soit M' le projeté orthogonal de M sur le plan Q
   a) Montrer que les plans (AMH) et (MM'H) sont parallèles
   a) En déduire que les points A, H, M et M' sont coplanaires
4) a) Montrer que si $M\neq A$, le quadrilatère AMM'H est un rectangle
   b) Déterminer les coordonnées des points M pour que AMM'H soit un carré
   c) Déterminer les coordonnées des points M pour que $d(M,D)=5$

Exercice 7

On considère les plans $P : 2x-y+2z-5=0$ et $Q : 2x+2y-z-4=0$ Soit $A(1,2,-1)$

1) Montrer que les plans Pet Q sont perpendiculaires
2) a) Vérifier que $A\notin P$ et que $A\notin Q$
   b) Calculer la distance du point A à chacun des plans P et Q
   c) en déduire la distance du point A à la droite D intersection des plans P et Q
3) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D
   b) Déterminer par ses coordonnées, le point M de la droite D pour lequel la distance AM est minimale

Exercice 8

On considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,1,1)$

1) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB)
2) Soit P_m le plan d'équation : $x+y+m-3=0$ ou m est un paramètre réel
   a) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m
   b) Pour quelle valeur de m la droite (AB) est incluse dans le plan P_m
   c) Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q

3) Soit B' le projeté orthogonal de B sur P_m et A' le projeté orthogonal de A sur P_m
Déterminer les valeurs de m pour que ABB'A' soit un carré

__Exercice 9__

Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de ξ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon
2) Soit le plan $P : x + z - 1 = 0$. Montrer que Pet S sont sécants suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon
3) Soit le point $A(2, 0, -1)$
   a) Vérifier que $A \in S$
   b) Donner une équation cartésienne du plan Q tangent à S en A
   c) Montrer que P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection

__Exercice 10__

Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de ξ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ et le point $B(0, -1, 1)$

1) Montrer que S est une sphère de centre $A(1, 0, 0)$ et de rayon 2
2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à (AB) en B
3) Montrer que l'intersection de S et P est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon
4) Soit m un réel. Soit le plan $P_m : mx + my - z + 2 = 0$
   a) Etudier suivant les valeurs de m la position relative de S et P_m
   b) Montrer que le plan P_0 est tangent à la sphère S et déterminer les coordonnées du point de contacte C

__Exercice 11__

On donne le point $I(-1, 3, 0)$ et les plans $P_1 : 2x - y + z + 5 = 0$ et $P_2 : x - 2z + 1 = 0$

1) a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires
   b) Montrer que la droite $D = P_1 \cap P_2$ passe I et dont un vecteur directeur est $\vec{U} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$
   c) Montrer que le plan P, perpendiculaire à D et passant par le point $A(2, 0, -1)$, a pour équation cartésienne : $2x + 5y + z - 3 = 0$
2) a) Déterminer par ces coordonnées le point H commun à D et P
   b) Calculer de deux manières la distance $d(A; D)$
3) Soit $S = \{M(x, y, z) \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6 = 0\}$
   a) Montrer que S est une sphère de centre le point I et dont on déterminera le rayon R
   b) Montrer que $S \cap P$ est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon
   c) Déterminer par leurs coordonnées les points communs à S et D
4) Déterminer par leurs équations cartésiennes les plans parallèles à P et tangents à S

__Exercice 12__

On considère les points $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(2, -1, 2)$

1) a) Montrer que les ponts A, B et C ne sont pas alignés
   b) On note P le plan (ABC). Montrer qu'une équation cartésienne de P et $x + y + z - 3 = 0$
2) a) Soit Q le plan médiateur de $[AB]$ Montrer qu'une équation cartésienne de Q et $x - z + 1 = 0$
   b) On note D la droite d'intersection de P et Q. Trouver une équation cartésienne de D
3) Soit $S = \{M(x, y, z) \in \xi \text{ tel que } MB^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC} = 0\}$
   a) Vérifier que $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$
   b) En déduire que S est une sphère de centre $I(2, 0, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
   c) Montrer que le plan Q est tangent à S en un point H dont on déterminera les coordonnées

4) Soit $S_m = \{ M(x,y,z) \in \xi$ tel que $x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2(m+3)z+5m-10=0 \}$; $m \in IR$

a) Montrer que S_m est une sphère de centre $\Omega_m(m,m,m+3)$ et dont on déterminera le rayon R_m

b) Que décrit le point Ω_m lorsque m décrit IR

c) Discuter selon m la position relative de S_m et P

<u>Exercice 13</u>

On donne les points A(-3,0,0) ,B(-1,-1,0) ,C(-1,0,1) .

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A,B et C déterminent un plan (P).

c) Donner une équation cartésienne du plan (P).

d) Vérifier que l'aire du triangle ABC est égale à 32.

2) On désigne par Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\Delta : \begin{cases} x=-4+2t \\ y=-2+4t \\ z=2-4t \end{cases} \quad t \in IR$

a) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan (P) en A.

b) Montrer que le point E(-2,2,-2) appartient à Δ.

c) Calculer le volume du tétraèdre EABC.

3) Soit (S) ={M (x,y,z) E tels que $x^2+y^2+z^2+4x-4y+4z-2=0$ }.

a) Montrer que (S) est une sphère de centre E dont on précisera le rayon R.

b) Vérifier que B et C sont deux points de (S) .

c) Justifier que le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) dont on donnera le centre et le rayon r.

4) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) en B.

<u>Exercice 14</u>

On désigne par S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$

1) Montrer que S est une sphère de centre $\Omega(0,2,0)$ et de rayon 3

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x-2y+z-2=0$

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S \cap P$

3) Soit le plan P_m dont une équation cartésienne est : $2mx+(1-2m)y+mz+1-2m=0$

a) Soit Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1 \\ z=-2\lambda \end{cases}$; $\lambda \in IR$

Vérifier que la droite Δ est incluse dans P_m

b) Calculer la distance $d(\Omega, P_m)$ du point Ω au plan P_m

d) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S. Préciser les coordonnées du point de contacte

<u>Exercice 15</u>

On considère les points $A(1,1,-2)$, $B(1,2,-2)$ et $C(0,1,1)$

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan P

2) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i}+\vec{k}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+z-1=0$

3) Soit Q le plan perpendiculaire à (AC) passant par A

a) Donner une équation cartésienne de Q

b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires suivant (AB)

4) Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-2my+4z+4=0$ $(m \in IR)$

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b) Montrer que l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans IR , est la droite (AB)