Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par : $f(x)=x^2-1+\sqrt{x^2+x}$ et soit (C) sa courbe représentative

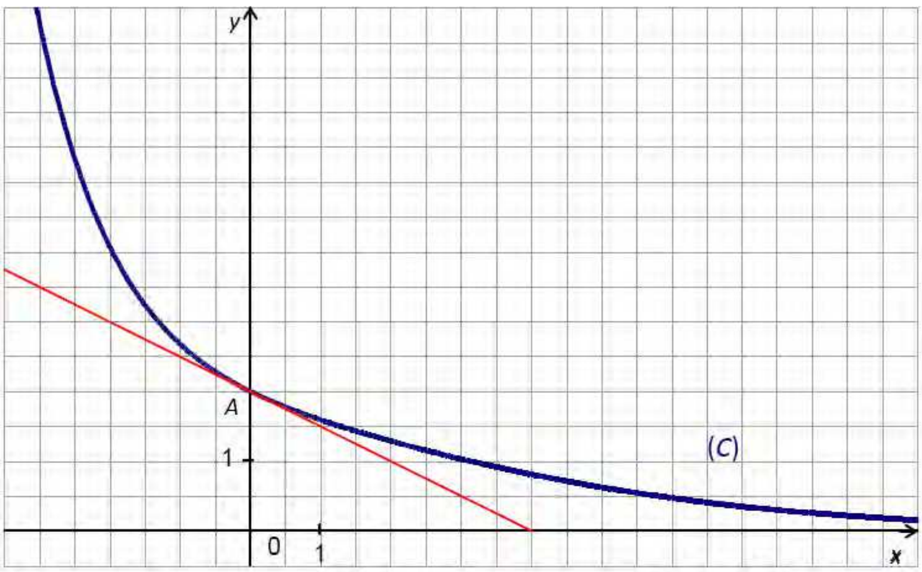
1) Montrer que f est continue sur $[0\ ,\ +\infty[$
2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu
   b) Montrer que f est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$
   c) En déduire que $f'(x)>0\ ;\ \forall x\in\ ]0\ ,\ +\infty[$
3) a) Dresser le tableau de variation de f
   b) Montrer que f est une bijection de $[0\ ,\ +\infty[$ sur $[-1\ ,\ +\infty[$
4) Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans $[0\ ,\ +\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in\ ]0\ ,\ 1[$
5) Soit f^{-1} la réciproque de f
   a) Donner le sens de variation de f^{-1}
   b) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1\ ,\ +\infty[$

Exercice 2

1. Soit $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$ la bijection de $]2,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$:

a) $f^{-1}(y)=\frac{-2y^2}{1-y^2}$ **b)** $f^{-1}(y)=\frac{2y^2}{1-y^2}$ **c)** $f^{-1}(y)=\frac{-2y^2}{y^2-1}$

2. La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



a) $(f^{-1})'(2)=-2$ **b)** $(f^{-1})'(2)=-\frac{1}{2}$ **c)** $(f^{-1})'(2)=2$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{\tan x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0^+ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que f est une bijection de $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0\ ,\ +\infty[$.

3) Soit g la fonction réciproque de f.

Montrer que g est dérivable sur $[0\ ,\ +\infty[$ et $\forall x\in[0\ ,\ +\infty[$ on a : $g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$

4) a) Montrer que $\forall x\in[0\ ,\ +\infty[$ on a $g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

b) En déduire que pour tout $\forall x\in IR$ $g\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+g\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ est une constante.

Exercice 4

1. Soit la fonction f définie sur$]0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$
   a. Calculer et interpréter géométriquement $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
   b. Montrer que f est dérivable sur$]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$
   c. Montrer que f réalise une bijection de$]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .
   d. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.
2. Soit la fonction g définie sur$]0,+\infty[$par $g(x)=f(x)-x$
   a. Dresser le tableau de variation de g
   b. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $1<\alpha<2$
3. Soit la suite u_n définie sur IN par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$
   a. Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$ on a $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$
   b. Montrer que pour tout $n\in IN$ on a $u_n\geq 1$
   c. Montrer que pour tout $n\in IN$ on a $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$
   d. Montrer que pour tout $n\in IN$ on a $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|1-\alpha|$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}u_n$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]1\ ,\ +\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]1\ ,\ +\infty[$ une unique solution α

c) Montrer que $1<\alpha<2$

2) Soit la fonction g définie sur $[1\ ,\ +\infty[$ par $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) Montrer que $g(\alpha)=\alpha$

4) a) Déterminer l'image de l'intervalle $[1\ ,\ +\infty[$ par g

b) Montrer que $\forall x \in [1\ ,\ +\infty[\quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que $\forall x \in [1\ ,\ +\infty[\quad |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

4) Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = g(U_n)\ \ \forall n \in IN$

a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

c) En déduire que $\forall n \in IN$ on a : $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice 6

Le graphique ci dessous est celui d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $[-2,4]$

T_1 : la demi-tangente au point d'abscisse -2

T_2 : la tangente horizontale au point de coordonnées (2 , -1)

T_3 : la demi-tangente au point de cordonnées (4 , -2)

En utilisant la courbe représentative de f :

1) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

a) $f'_d(-2) = -2$

b) $f'_g(4) = 2$

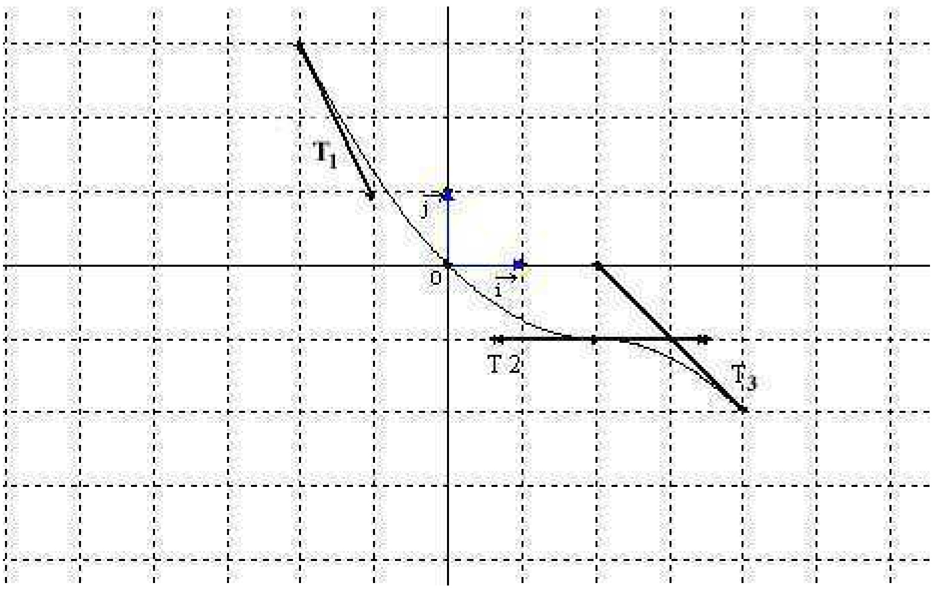
c) $f'(2) = 0$

d) La fonction f réalise une bijection de $[-2,4]$ sur un intervalle $[-2,3]$

2) Justifier que l a fonction réciproque f^{-1} de f n'est pas dérivable au point -1

3) Calculer $(f^{-1})'_d(3)$ et $(f^{-1})'_g(-2)$

4) Tracer la courbe C' de la fonction f^{-1}.



Exercice 7

Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = -x + \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) Donner le domaine de définition de f
2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

   b) Dresser le tableau de variation de f
3) a) Montrer que la droite $D : y = -x$ est une asymptote à (C)

   b) Etudier la position relative de (C) par rapport à D
4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0

   b) Tracer (C) ; D et T
5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left]-1\ ,\ +\infty\right[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1{,}5$
6) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-1\ ,\ +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera

   b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J

   c) Calculer en fonction de α ; $\left(f^{-1}\right)'(\alpha)$

   d) Tracer la courbe (C') de f^{-1}

Exercice 8

Le plan est rapporte a un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$La courbe (C_f)ci-dessous représente une fonction f définie sur IR et la droite **T** est la tangente à la courbe (C_f) au point A (1,2)

1) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(\dfrac{1}{x})$

2)Ecrire une équation cartésienne de la tangente **T** à (C_f)au point d'abscisse 1

3)Dresser le tableau de variations de f sur IR

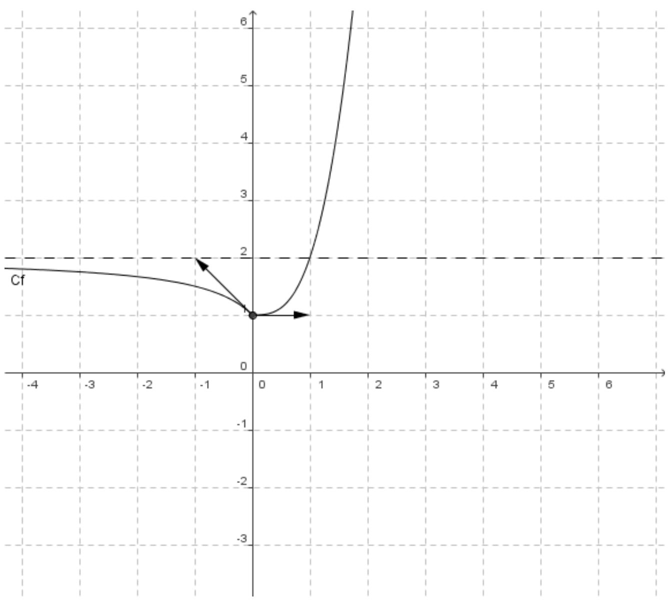
4) Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$

a. Montrer que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur sur un intervalle **J** que l'on précisera

b.Construire la courbe $(\zeta\,')$ de g^{-1} puis dresser le tableau de variations de g^{-1}

c. Calculer $(g^{-1})'(2)$

d. g^{-1}est elle dérivable a droite en 1 ? Justifier votre réponse



Exercice 9

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe (C)
2) Montrer que le point $\Omega(0\ ,\ 1)$ est un centre de symétrie de (C)
3) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle I que l'on déterminera
4) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère
5) Montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet dans IR une unique solution α et que $\alpha>1$
6) Soit la fonction h définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x)=\tan x$

On pose $H=f\circ h$ et $G=\dfrac{1}{f\circ h}$

a) Expliciter $H(x)$ et $G(x)$ pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que G est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Etudier la dérivabilité de G^{-1} sur J et calculer $\left(G^{-1}\right)'(x)$

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la fonction f défini sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x}{2x+1} & \text{si } x\geq 0 \\ f(x)=-x+\sqrt{x^2-x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

1) a) Etudier la continuité de f en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) a) Montrer que pour tout x>0. $f'(x)=\dfrac{-1}{(2x+1)^2}$

   b) Montrer que pour tout x<0 ; $f'(x)=-1+\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$, déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty;0[$

   c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0[$.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
   b) Calculer $g^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)$.
   c) Expliciter $g^{-1}(x)$.
   d) Tracer dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes représentatives de g et de g^{-1}.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{-\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \sin x$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{-\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1\ ,\ 1]$

2) Justifier que : $f^{-1}(0) = 0$

3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1\ ,\ 1[$

   b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en -1 et 1

   c) Prouver que $\forall x \in\ ]-1\ ,\ 1[$ on a : $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) Soit la fonction g définie par : $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$

   a) Montrer que la fonction g est continue sur $[-1\ ,\ 1]$ et qu'elle est dérivable sur $]-1\ ,\ 1[$

   b) Montrer alors que la fonction g est constante sur l'intervalle $[-1\ ,\ 1]$

   c) En déduire que la fonction f^{-1} est impaire

5) Soit la fonction h définie sur l'intervalle $]-1\ ,\ 1[$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{f^{-1}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

   a) Montrer que la fonction h est paire

   b) On considère les fonctions U et V définies sur l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ par :

$$U(x) = f^{-1}(x) - x \qquad \text{et} \qquad V(x) = f^{-1}(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prouver que la fonction U est croissante sur $[0\ ,\ 1]$ et que la fonction V est décroissante sur $[0\ ,\ 1]$

   c) En déduire que $\forall x \in [0\ ,\ 1[$ on a : $x \leq f^{-1}(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   d) Montrer alors que la fonction h est continue en 0