4ÈME ANNÉE

SECTION MATHS

LYCÉE HAMOUDA PACHA

DEVOIR DE CONTRÔLE # 1

Mathématiques — **Pr : Ben Fredj s.**

Année sc : 2012-2013 — **Durée : 2 h**

Exercice 1. (4 points). Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse.

1– (x_n) est une suite convergente et minorée par -1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$.

2– (a_n) et (b_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $b_n = a_n + \dfrac{n}{n+1}$ sont adjacentes.

3– (c_n) est une suite monotone telle que, pour tout $n \geq 1$, $2 - \dfrac{1}{n} \leq c_n \leq 3 - \dfrac{1}{n}$ alors la suite (c_n) est convergente.

Exercice 2. (5 points). On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_\theta) : \quad z^2 - 2i\sin(2\theta)z - 1 = 0$$

où θ est un réel donné.

1– Vérifier que $e^{2i\theta}$ est une solution de (E_θ) puis déduire la deuxième solution (On pourra l'écrire sous forme exponentielle).

2– Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E'_\theta) : \quad z^4 - 2i\sin(2\theta)z^2 - 1 = 0$$

où θ est un réel donné.(On donnera les solutions sous forme exponentielle)

3– Montrer que les images dans le plan complexe des solutions de (E'_θ) sont les sommets d'un rectangle.

Exercice 3. (6 points) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Pour tout nombre complexe z différent de -1, on pose $Z=(1-i)\dfrac{z}{1+z}$

1– On pose $z=x+iy$ où x,y sont deux réels tels que $(x,y)\neq(-1,0)$.

(a) Vérifier que $\mathbf{Im}\,(Z)=-\dfrac{x^2+y^2+x-y}{(1+x)^2+y^2}$. (où $\mathbf{Im}\,(Z)$ désigne la partie imaginaire du complexe Z).

(b) Déterminer et construire l'ensemble des points d'affixes z pour que Z soit un réel.

2– Soit A le point d'affixe -1. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tel que :

$$\mathbf{arg}\left(\frac{z}{1+z}\right)=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}.$$

(a) Montrer que $M\in\mathscr{E}$ si et seulement si, Z est un réel non nul.

(b) Déterminer alors $\mathscr{E}$.

3– Soit M_0 et N_0 les points d'affixes respectives, z_0 et iz_0 où $z_0\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$

(a) Vérifier que les droites (ON_0) et (OM_0) sont perpendiculaires.

(b) Expliquer comment faut-il choisir le point M_0 et le point N_0 pour que les vecteurs $\overrightarrow{N_0M_0}$ et $\overrightarrow{AM_0}$ soient colinéaires .

Exercice 4. (5 points). On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_1=1 \text{ et pour tout } n\geq 1,\ U_{n+1}=U_n+\frac{1}{U_1+U_2+\ldots+U_n}$$

1– Montrer que pour tout $n\geq 1$, $U_n>0$.

2– Montrer que (U_n) est croissante.

3– Pour tout $n\geq 1$, on pose $V_n=U_n^2$.

(a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $V_{n+1}-V_n\geq\dfrac{2}{n}$

(b) Déduire que pour tout $n\geq 1$, $V_{2n}-V_n\geq 1$

(c) Montrer que (V_n) n'est pas majorée puis calculer sa limite puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

4– (a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $1<\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\leq 1+\dfrac{1}{nU_n}$

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$