Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 1

A) Soit f la fonction définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{2}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) a) Etudier les variations de f

b) Montrer que f réalise une bijection de $]0\ ,\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera

c) Soit g la fonction définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$

c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $\alpha=2$

2) a) Montrer que $\forall\, x\in[2\ ,\ +\infty[$ on a : $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$

b) En déduire que $\forall\, x\in[2\ ,\ +\infty[$ on a : $|f(x)-2|\leq\dfrac{1}{2}|x-2|$

3) Soit f^{-1} la réciproque de f et soit (C′) sa courbe représentative.

a) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur J

b) Calculer $f^{-1}(3)$ puis $\left(f^{-1}\right)'(3)$

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1}

d) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in$ J

e) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in$ J

Exercice 2

A) Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par : $f(x)=x^2-1+\sqrt{x^2+x}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) Montrer que f est continue sur $[0\ ,\ +\infty[$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

b) Montrer que f est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$

c) En déduire que $f'(x)>0\ ;\ \forall x\in\ ]0\ ,\ +\infty[$

3) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f est une bijection de $[0\ ,\ +\infty[$ sur $[-1\ ,\ +\infty[$

4) Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans $[0\ ,\ +\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in\ ]0\ ,\ 1[$

B) Soit f^{-1} la réciproque de f

1) Donner le sens de variation de f^{-1}

2) a) Montrer que f^{-1} est continue et dérivable sur $[-1\ ,\ +\infty[$

c) Calculer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)$

3) Construire (C′) la courbe représentative de f^{-1}

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]1\ ,\ +\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]1\ ,\ +\infty[$ une unique solution α

c) Montrer que $1<\alpha<2$

2) Soit la fonction g définie sur $[1\ ,\ +\infty[$ par $g(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3) Montrer que $g(\alpha)=\alpha$

4) a) Déterminer l'image de l'intervalle $[1\ ,\ +\infty[$ par g

b) Montrer que $\forall x \in [1\ ,\ +\infty[\quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que $\forall x \in [1\ ,\ +\infty[\quad |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur par : $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) Donner le domaine de définition de f
2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

   b) Dresser le tableau de variation de f
3) a) Montrer que la droite $D : y = -x$ est une asymptote à (C)

   b) Etudier la position relative de (C) par rapport à D
4) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0

   b) Tracer (C) ; D et T
5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1\ ,\ +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < 1{,}5$
6) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1\ ,\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera

   b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J

   c) Calculer en fonction de α ; $\left(f^{-1}\right)'(\alpha)$

   d) Tracer la courbe (C') de f^{-1}

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la fonction f défini sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x}{2x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

1) a) Etudier la continuité de f en 0.

   b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) a) Montrer que pour tout x>0. $f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$

   b) Montrer que pour tout x<0 ; $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$, déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty;0[$

   c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0[$.

   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

   b) Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et $\left(g^{-1}\right)'(\sqrt{2})$.

   c) Expliciter $g^{-1}(x)$.

   d) Tracer dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes représentatives de g et de g^{-1}.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Interpréter graphiquement les deux résultats.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit la fonction $h(x)= f(x)-x$

   a) Dresser le tableau de variation de h.

   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α

   c) Vérifier et que $1<\alpha<\sqrt{2}$

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Tracer dans le même repère $(C_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1}.

   c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 7

Le plan est rapporte a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$La courbe (C_f)ci-dessous représente une fonction f définie sur IR et la droite **T** est la tangente à la courbe (C_f) au point A (1,2)

1) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(\frac{1}{x})$

2)Ecrire une équation cartésienne de la tangente **T** à (C_f)au point d'abscisse 1

3)Dresser le tableau de variations de f sur IR

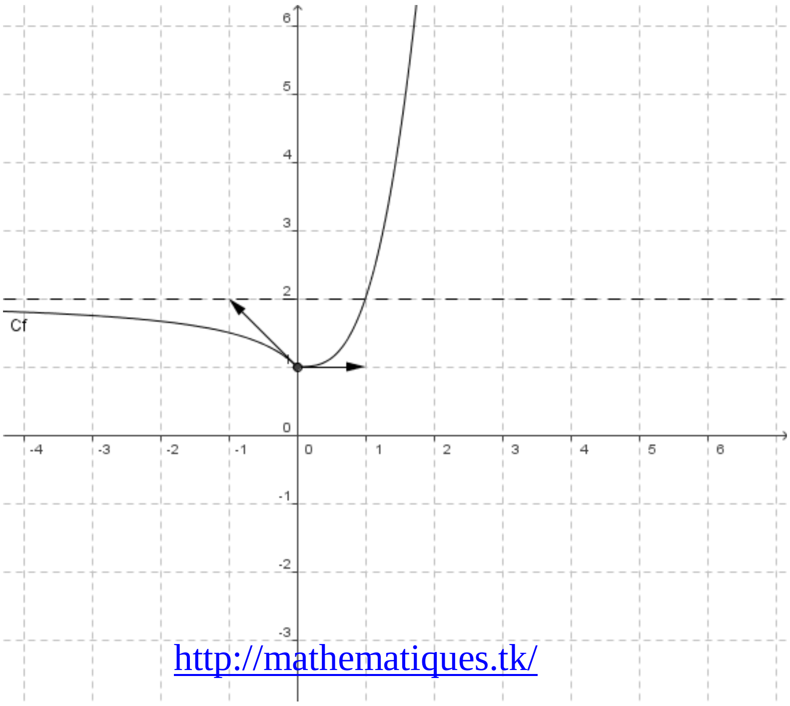
4) Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$

a. Montrer que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur sur un intervalle **J** que l'on précisera

b.Construire la courbe (ζ ') de g^{-1} puis dresser le tableau de variations de g^{-1}

c. Calculer $(g^{-1})'(2)$

d. g^{-1}est elle dérivable a droite en 1 ? Justifier votre réponse



http://mathematiques.tk/