*Lycée Hammouda Pacha*

MATHÉMATIQUES

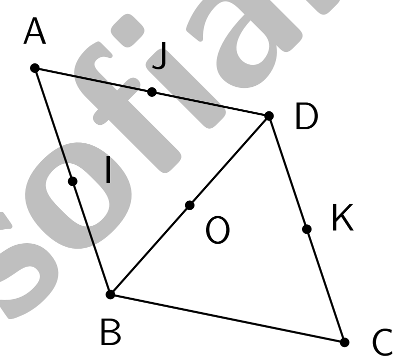
**Devoir de synthèse # 1**

$4^{\text{éme}}$ MATHS — DURÉE : 3H

ANNÉE SC : 2010-2011 — PR : BEN FREDJ SOFIANE

**EXERCICE 1 (3 points).** QCM voir page 3

**EXERCICE 2 (6 points).** ABD est un triangle équilatéral, $I, O, J$ sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BD]$ et $[AD]$ et soit C le symétrique de A par rapport à $(BD)$ et K est le milieu de $[DC]$.Soit f l'isométrie du plan vérifiant :




- f n'admettant pas de points fixes,
- $f(A) = B$ et $f(I) = O$.

1– Montrer que f est une symétrie glissante.

2– Montrer que O est le milieu du segment $[B, f(B)]$ puis déduire $f(B)$.

3– a– Identifier l'isométrie du plan qui envoi A en B, B en D et D en A.

b– Déterminer l'image du triangle ABD par f puis déduire $f(D)$.

4– Soit $g = t_{\overrightarrow{DJ}} \circ f$ où $t_{\overrightarrow{DJ}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{DJ}$.

a– Montrer que $g(B) = J$

b– Déterminer $g(I)$ et $g(O)$ puis identifier g.

c– Déduire que $f = S_{(IO)} \circ t_{\overrightarrow{JD}}$ où $S_{(JO)}$ est la symétrie orthogonale d'axe $(JO)$.

**EXERCICE 3 (6 points).** Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1– a– Étudier les variations de f puis donner son tableau de variation.

b– Montrer que l'équation $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = x$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$ puis vérifier que $\alpha < 1$.

Ben fredj sofiane

2– a– Montrer que $f'([0,+\infty[) = [-1,0[$.

b– Montrer que pour tout réel positifs x, on : $|f\left(\frac{x}{2}\right) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

3– On considère la suite $(U_n)$ définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f\left(\frac{U_n}{2}\right)$.

a– Montrer que pour tout n de $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \geq 0$.

b– Montrer que pour tout n de $n \in \mathbb{N}$, on a: $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

c– Montrer que $(U_n)$ est convergente.

EXERCICE 4 (5 points). Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x) = 1+\tan x$

1– a– Montrer que $\varphi$ réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1,+\infty[$. On note $\varphi^{-1}$ la réciproque de $\varphi$.

b– Montrer que $\varphi^{-1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$.

c– Montrer que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}$.

2– Soit u la fonction définie sur l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $u : x \longmapsto 1+\cot x$.

Déterminer $u\left(]0,\frac{\pi}{2}]\right)$.

3– Soit $\psi$ la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\psi(x) = x + \varphi^{-1}(1+\cot x)$

a– Montrer que $\psi$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b– Montrer que pour tout réel $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\psi'(x) = 0$

c– Calculer $\psi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ puis déduire l'expression de $\psi(x)$ en fonction de x.

Ben fredj sofiane

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse des trois réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

1– Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct et soit $\mathbf{T}$ l'application du plan dans lui même qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z' = -i\bar{z}$, alors $\mathbf{T}$ est :

**(a)** ☐ une homothétie

**(b)** ☐ une symétrie glissante

**(c)** ☐ symétrie orthogonale

2– $B, C$ et $D$ sont trois points non alignés du plan orienté.

a– Soit $\mathbf{R} = S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ \mathbf{t}_{\overrightarrow{BD}}$ alors $\mathbf{R}$ est une

**(a)** ☐ rotation

**(b)** ☐ translation

**(c)** ☐ symétrie glissante

b– Soit $\varphi$ l'isométrie du plan telle que $\varphi(B) = C$, $\varphi(C) = D$ et $\varphi(D) = B$, alors $\varphi$ est une

**(a)** ☐ symétrie orthogonale

**(b)** ☐ translation

**(c)** ☐ rotation ou symétrie glissante .

Ben fredj sofiane

# CORRIGÉ DU DEVOIR DE SYNTHÈSE # 1

## ANNÉE SCOLAIRE 2010-2011

## PR BEN FREDJ SOFIANE

**SOLUTION 1.** 1− **c**

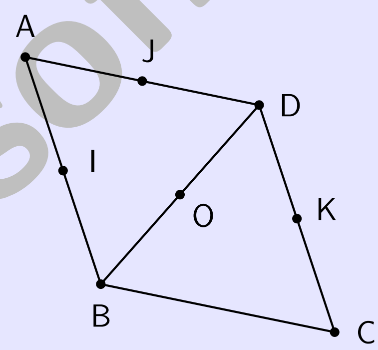
2− **a**

3− **b**

**SOLUTION 2.** ABD est un triangle équilatéral, $I, O, J$ sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BD]$ et $[AD]$ et soit C le symétrique de A par rapport à $(BD)$ et K est le milieu de $[DC]$.

Soit f l'isométrie du plan vérifiant :

- f n'admettant pas de points fixes,
- $f(A) = B$ et $f(I) = O$.




1− f est une isométrie sans points fixes alors elle est une translation ou une symétrie glissante. Supposons que $f = t_{\vec{u}}$, comme $A \xrightarrow{f} B$ et $I \xrightarrow{f} O$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IO}$ alors $(AB) \parallel (IO)$ ( c'est absurde )

Donc f est une symétrie glissante.

2− $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ équivaut à $\overrightarrow{f(A)f(I)} = \overrightarrow{f(I)f(B)}$ équivaut à $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{Of(B)}$.

Comme $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ alors $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{Of(B)}$ alors $f(B) = D$.

3− a− Une isométrie est parfaitement déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images respectives, alors une telle isométrie est unique. Comme les médiatrices respectives des segments $[AB]$,$[BD]$ et $[DA]$ sont concourantes alors cette isométrie est une rotation d'angle non nul (Car elle est différente de l'identité $f(A) \neq A$).

b− ABD est un triangle équilatérale, son image $BDf(D)$ par f est un triangle équilatéral alors $f(D) \in \left\{A, C\right\}$ d'après la question précédente $f(D) \neq A$ (si non f sera une rotation) et par la suite $f(D) = C$.

4− a− $B \xrightarrow{f} D \xrightarrow{t_{\overrightarrow{DJ}}} J$ alors $g(B) = J$.

b− • $I \xrightarrow{f} O \xrightarrow{t_{\overrightarrow{DJ}}} I$ alors $g(I) = I$,

Ben fredj sofiane

- $O \overset{f}{\longmapsto} K \overset{t_{\overrightarrow{DJ}}}{\longmapsto} O$ ( $O = B * D$ implique $f(O) = D * C$ implique que $f(O) = K$) donc $g(O) = O$.

$g \neq \textbf{id}$ ( puisque $f(B) \neq B$) et $O, I$ sont invariants par g alors g est une symétrie orthogonale d'axe (OI).

c− Comme $g = t_{\overrightarrow{DJ}} \circ f$ alors $f = t_{\overrightarrow{JD}} \circ g$ donc $f = t_{\overrightarrow{JD}} \circ S_{OI}$.

Notons $f' = S_{OI} \circ t_{\overrightarrow{JD}}$, alors :

- $f'(A) = S_{OI}(J) = B$,
- $f'(I) = S_{OI}(O) = O$,
- $f'(O) = S_{OI}(K) = K$

$f'$ et f coïncident en trois points non alignés alors elles coïncident par tout donc $f = f'$.

**SOLUTION 3.** 1− a−

- $f'(x) = \dfrac{-\left(1+x+x^2\right)'}{\left(1+x+x^2\right)^2} = -\dfrac{1+2x}{\left(1+x+x^2\right)^2}$
- Pour tout réel $x \geq 0$ $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
- $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- Le tableau de variation de f est :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ ↘ | $0$ |

b− On pose $g(x) = f(\frac{x}{2}) - x$.

- Pour tout réel $x \geq 0$ $g(x) = \frac{1}{2} \times f'(\frac{x}{2}) - 1$
- $g'(x) < 0$ sur $[0, +\infty[$ alors g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$
- g est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ alors elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[) = ]-\infty, 1]$ ( car $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$)
- $0 \in g([0, +\infty[) = ]-\infty, 1]$

Alors l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha$ dans $[0, +\infty[$

2− a− Pour $x \geq 0$, on a :$f'(x) + 1 = \dfrac{-1 - 2x + (1+x+x^2)^2}{(1+x+x^2)^2} = \dfrac{3x^2 + 2x^3 + x4}{(1+x+x^2)^2} \geq 0$ et comme $f'(x) < 0$ sur $[0, +\infty[$ alors :

$$\text{pour tout } x \geq 0, \ -1 \leq f'(x) < 0$$

b−

- f est dérivable sur $[0, +\infty[$
- pour tout réel $x \geq 0$ , $|f'(x)| \leq 1$

Ben fredj sofiane

- $\frac{x}{2}$ et $\frac{\alpha}{2}$ sont positifs

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis alors :
$|f(\frac{x}{2}) - f(\frac{\alpha}{2})| < |\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}|$
Donc $|f(\frac{x}{2}) - \alpha| < \frac{1}{2} \times |x - \alpha|$

3– a– On procède par récurrence :

- Initiation :$a_0 = 0$ alors $a_0 \geq 0$ vraie pour $n = 0$
- Héréditaire : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposant que $a_n \geq 0$.
  Comme f est positive sur $[0, +\infty[$ alors $f(\frac{a_n}{2}) \geq 0$ donc $a_{n+1} \geq 0$.
- Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.

b– On procède par récurrence :

- Initiation :$|a_0 - \alpha| = \alpha$ et $\alpha < 1$ alors $|a_0 - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^0}$ donc vraie pour $n = 0$
- Héréditaire : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposant que $|a_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$.
  Comme $|a_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|a_n - \alpha|$ (D'après 2 – b– ) donc $|a_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
- Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

c– $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n - \alpha| = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \alpha$

**SOLUTION 4.** . On note $I = [0, \frac{\pi}{2}[$

1– (a) $\varphi$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $\varphi'(x) = 1 + \tan^2 x$.
Pour tout réel $x \in I$, $\varphi'(x) > 0$ d'où $\varphi$ est strictement croissante sur I.
$\varphi$ **est dérivable et strictement croissante sur** I, alors elle réalise une bijection de I sur $\varphi(I) = \left[\varphi(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varphi(x)\right[ = [1, +\infty[$ puisque $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

(b) $\varphi$ **est dérivable** sur I et $\varphi'$ **ne s'annule par sur** I alors $\varphi^{-1}$ est dérivable sur $\varphi(I) = [1, +\infty[$.

(c) Pour tout réel $t \geq 1$, on a :$\left(\varphi^{-1}\right)'(t) = \dfrac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}$.

On a $\varphi'(x) = 1 + \tan^2 x$ et $\tan x = \varphi(x) - 1$ d'où $\varphi'(x) = 1 + \left(\varphi(x) - 1\right)^2$.

pour tout réel $t \geq 1$, on a $\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right) = 1 + \left(\varphi\left(\varphi^{-1}(t)\right) - 1\right)^2 = 1 + (t-1)^2$.

Donc

$$\text{pour tout réel } t \geq 1, \quad \left(\varphi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{1 + (t-1)^2}$$

2– On note $J = ]0, \frac{\pi}{2}]$. La fonction u est dérivable sur J et pour tout réel $x \in J$, $u'(x) = -1 - \cot^2 x$.
$u'$ est strictement négative sur J alors elle est strictement décroissante sur J.
U est continue et strictement décroissante sur J alors $u(J) = \left[u(\frac{\pi}{2}), \lim\limits_{x \to 0^+} u(x)\right[ = [1, +\infty[$ puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \cot x = +\infty$.

Ben fredj sofiane

3− (a) La fonction u est dérivable sur J et $u(J) = [1, +\infty[$ et $\varphi^{-1}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ alors la composée $\varphi^{-1} \circ u$ est dérivable sur J et par la suite $\psi$ est dérivable sur J comme étant la somme de deux fonctions dérivables.

(b) Pour tout réel $x \in J$,

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= 1 + \left(\varphi^{-1} \circ u\right)'(x) = 1 + u'(x) \times \left(\varphi^{-1}\right)'(u(x)) \\ &= 1 + \frac{u'(x)}{1 + \left(u(x) - 1\right)^2} = \frac{1 + \left(u(x) - 1\right)^2 + u'(x)}{1 + \left(u(x) - 1\right)^2} = \frac{\cot^2 x - \cot^2 x}{1 + \left(u(x) - 1\right)^2} = 0\end{aligned}$$

(c) $\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \varphi^{-1}\left(1 + \cot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \varphi^{-1}(2)$.

Par ailleurs $\varphi^{-1}(2) = x$ alors $1 + \tan x = 2$ alors $\tan x = 1$ et comme $x \in I$ donc $x = \frac{\pi}{4}$

Donc $\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout réel $x \in J$, $\psi'(x) = 0$ donc $\psi$ est constante sur J et comme $\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$\text{Pour tout réel } x \in J,\ \psi(x) = \frac{\pi}{2}$$

Ben fredj sofiane