Exercice 1 (6 points)

Soit la fonction f la fonction définie sur IR_+ par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur IR_+.

b) Montrer que f réalise une bijection de IR_+ sur $[1\ ,\ +\infty[$.

c) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est continue sur $[1\ ,\ +\infty[$ et préciser son sens de variation sur $[1\ ,\ +\infty[$.

2) a) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]1\ ,\ +\infty[$.

b) Montrer que f n'est pas dérivable en 1.

c) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x\in[1\ ,\ +\infty[$.

3) Soit la suite réelle U définie sur IN par … $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n)\ ;\ \ \forall n\in IN \end{cases}$

a) Montrer que la suite U est croissante.

b) Montrer que la suite U n'est pas majorée.

c) Déterminer alors la limite de la suite réelle U.

Exercice 2 (6 points)

Soit la suite réelle U définie sur IN par… $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\dfrac{3U_n-1}{2U_n} \end{cases}\ ;\ \forall n\in IN$

1) a) Montrer que $\forall n\in IN$ on a $U_n\geq 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit la suite réelle V définie sur IN par : $V_n=\dfrac{2U_n-2}{2U_n-1}$.

a) Montrer que la suite V est géométrique de raison : $q=\dfrac{1}{2}$.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Retrouver alors la limite de la suite U.

3) a) Montrer que : $\forall n\in IN$ on a : $U_{n+1}-1\leq\dfrac{1}{2}(U_n-1)$

b) Montrer par récurrence que : $\forall n\in IN$ on a : $U_n-1\leq\dfrac{1}{2^n}$

c) Retrouver alors la limite de la suite U.

Exercice 3 (8 points)

1) Soit $f(z) = z^3 - (6+i)z^2 + (13+7i)z - 10(1+i)$ où z est un nombre complexe .

a) Résoudre dans C l'équation $z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$

b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

c) Résoudre dans C l'équation $f(z) = 0$.

2) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe -16.

b) En déduire les solutions de l'équation $z^4 = -16$.

3) a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $8i$.

b) Ecrire chacune des racines cubiques obtenues sous forme algébrique.

c) Soit $z \in C \backslash \{1\}$ et $z \in C \backslash \{i\}$.

Montrer que $Z = \dfrac{iz + \sqrt{3}}{z - 1} \Leftrightarrow z = \dfrac{Z + \sqrt{3}}{Z - i}$.

d) En déduire les solutions de l'équation complexe : $\left(iz + \sqrt{3}\right)^3 = 8i(z-1)^3$