Lycée 2 Mars Ksar Hellal | **Devoir de contrôle n° 1** | **$4^{ème}$ M**
Boudhaouia | **Durée : 2 h** | **Le 11/11/2011**

<u>Exercice 1</u> (6,5 points)

Soit la fonction f définie sur IR^* par : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR^* et que $\forall x\in IR^*$ on a : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur IR^*

c) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty,0[$; $[1,+\infty[$ et $]0,+\infty[$.

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1\ ,\ 2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $[-2\ ,\ -1]$ une unique solution α.

c) Déterminer une valeur approchée par défaut de α à $0,25$ près.

3) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}x$ admet dans l'intervalle $[-2\ ,\ -1]$ une unique solution.

<u>Exercice 2</u> (6,5 points)

Soit les suites U et V définies sur IN par :

$U_0=0$; $V_0=1$ $\forall n\in IN$ on a : $U_{n+1}=\dfrac{2U_n+V_n}{3}$ et $V_{n+1}=\dfrac{3U_n+2V_n}{5}$.

1) Calculer U_1 et V_1.

2) Montrer, par récurrence, que $\forall n\in IN$ on a : $U_n\le V_n$.

3) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.

4) Montrer que les suites U et V sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

5) Soit la suite W définie sur IN par : $W_n=9U_n+5V_n$

a) Montrer que W est une suite constante.

b) En déduire la valeur de la limite commune des suites U et V.

<u>Exercice 3</u> (7 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.

On considère le point A d'affixe -1 et les points M, N et P d'affixes respectifs z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de -1 et de 1.

1) a) Montrer que : le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $\dfrac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

b) On pose $z=x+iy$ où $x\in IR$ et $y\in IR$. Montrer que $\dfrac{1+z}{z}=\dfrac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

c) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M, tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Soit M le point de l'ensemble (Γ) tel que $(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM})\equiv\dfrac{7\pi}{8}[2\pi]$ et H son projeté orthogonal sur l'axe $(O,\vec{u})$.

a) Faites une figure ; on choisira 6cm pour l'unité du repère $(0,\vec{u},\vec{v})$.

b) On rappelle que z, z^2 et z^3 sont les affixes respectifs des points M, N et P.

Montrer que $(\overrightarrow{OM}\ ,\ \overrightarrow{ON})\equiv\dfrac{7\pi}{8}[2\pi]$; $(\overrightarrow{ON}\ ,\ \overrightarrow{OP})\equiv\dfrac{7\pi}{8}[2\pi]$ et $ON=OM^2$.

c) Montrer que $OH=OM^2$.

d) Construire alors les points N et P tels que li triangle MNP est rectangle en P.