<u>Exercice 1</u> (5 points)

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2iz - (1+a^2) = 0$ où a est un paramètre complexe.

1) a) Résoudre dans C l'équation (E), on notera par z_1 et z_2 ses solutions.

b) Montrer que $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow a \in IR$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M et I d'affixes respectives 1 ; $-1+2i$; $i+a$; $i-a$ et i

a) Montrer que M et N sont symétriques par rapport au point I.

b) Lorsque $M \notin (AB)$; montrer que $AMBN$ est un parallélogramme.

3) On suppose que $a = e^{i\theta} + 1 - i$, où $\theta \in [0\ ,\ 2\pi[$.

a) Montrer que lorsque θ varie, le point M varie sur le cercle ζ de centre A et de rayon 1.

b) Montrer que lorsque θ varie, le point N varie sur un cercle fixe que l'on déterminera.

<u>Exercice 2</u> (5 points)

1) On considère l'équation $(E_1) : z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$

a) Vérifier que : $1-i$ est une solution de (E_1)

b) Déterminer alors l'autre solution de (E_1)

2) On considère l'équation (E_2) : $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$

a) Montrer que (E_2) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Résoudre dans C l'équation (E_2)

3) Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives ; $a = 2i$; $b = 1-i$ et $c = -2-2i$

a) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $\dfrac{b-c}{b-a}$

b) En déduire que le triangle BAC est rectangle, isocèle en B est direct.

<u>Exercice 3</u> (4 points)

Soit la fonction f définie sur $IR \setminus \{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sin\dfrac{\pi}{x}}{x-1} & \text{si } x \in]0\ ,\ 1[\cup]1\ ,\ +\infty[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x & \text{si } x \in]-\infty\ ,\ 0] \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $\forall x \in]0\ ,\ 1[$ on a $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1} \le f(x) \le -\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

b) Montrer que f est continue en 0

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\, f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) Soit les fonctions u, v et w définies sur $IR_+^* / \{1\}$ par :

$$u(x) = \frac{\pi(x-1)}{x} \quad , \quad v(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

a) Vérifier que : $\forall x \in IR_+^* / \{1\}$ on a $\quad f(x) = w(x) \times (v \circ u)(x)$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1

Exercice 4 (6 points)

Soit la suite réelle U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in IN \quad U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+(U_n)^2} \end{cases}$

1) a) Etudier le sens de variation sur IR de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$

b) En déduire que $\forall n \in IN$ on a : $\dfrac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

c) Montrer que la suite U est convergente

d) Déterminer la limite de la suite U

2) Soit les suites V et S définies sur IN par : $V_n = 1 - U_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $0 \leq V_{n+1} \leq \dfrac{2}{5} V_n$

b) En déduire que $\forall n \in IN$ on a : $0 \leq V_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

c) En déduire que $\forall n \in IN$ on a : $0 \leq S_n \leq \dfrac{5}{6}\left[1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

d) Déterminer alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$