MR : EL HATTAY Mohamed MOHAMED***

Exercice N°1(session :juin P 1994 section : Sc exp)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i}\ ,\vec{j})$.

$(\mathcal{C})$ est le cercle trigonométrique et t est l'affixe d'un point M du cercle $(\mathcal{C})$.

$t \in \mathbb{C}$, Argument de t est un réel $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1°) Soit $u = t^3$ et $v = 2\,t$. Écrire u et v sous la forme trigonométrique.

2°) Soit $w = 2t - t^3$ et A, B et C les points d'affixes respectives u , v et w.

a) Placer, dans le plan P , les points A, B et C dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

b) Déterminer les réels α pour lesquels les points O, A et B sont alignés.

3°) On suppose, dans la suite que $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

a) Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?

b) Déterminer le réel α pour que le quadrilatère OABC soit un rectangle.

****

Exercice N°2(session :juin P 1996 section : Sc exp)

On considère les nombres complexes $\alpha = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

1°) Écrire α *et* β sous forme exponentielle.

2°) soit $\theta \in \left]0;\pi\right[$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$. On désignera par z_1 la solution ayant une partie imaginaire négative et par z_2l'autre solution .

b) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

3°) Déterminer θ pour que l'on ait : $z_1 = \alpha$ *et* $z_2 = \beta$.

****

Exercice N°3(session :juin P 1997 section : Sc exp)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - 2(1+i)z + \frac{1}{2} + i = 0$.

2°) Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et (E_θ) l'équation : $2z^2 - (1 + 2\cos\theta + 2i)z + \cos\theta + i = 0$, avec $z \in \mathbb{C}$

a) Montrer que l'équation (E_θ) admet une racine réelle que l'on calculera.

b) Calculer l'autre racine en fonction de .

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$.On considère Les points A et M d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $\mathrm{i} + \cos\theta$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque le réel θ varie dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calculer AM en fonction de θ et en déduire la valeur de θ pour laquelle AM est minimale.

Exercice N°4(session :juin P 1998 section : Sc exp)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)z^2-2z+1-i=0$.

2°) Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $mz^2-2z+\overline{m}=0$ (E)

où $\overline{m}$ est le nombre complexe conjugué de m.

3°) Dans toute la suite on prend m = $\sqrt{2}\,e^{i\alpha}$, où α *est un réel.*

a) Montrer que les racines z ' et z '' de l'équation (E) s'écrivent sous la forme :

$z' = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$ et $z'' = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$.

On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z ' et z '' et par M le point d'affixe z '+z ''.

Montrer que $\frac{z'}{z''}=\mathrm{i}$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux.

c) Montrer que le quadrilatère OM 'MM'' est un carré.

****

Exercice N°5(session :juin P 1999 section : Sc exp)

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2iz-2=0$.

b) Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

2°) Soit $\theta\in\,]0;\pi[$, on considère l'équation (E) : $z^2-2\,e^{i\theta}z+e^{2i\theta}-1=0$.

Résoudre l'équation (E).

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_1=2.e^{i\theta}$; $z_2=1+e^{i\theta}$ et $z_3=-1+e^{i\theta}$

a) Écrire z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

b) Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

c) Déterminer le réel θ *de* $]0;\pi[$ tel que OBAC soit un carré.

****

Exercice N°6(session :juin P 2000 section : Sc exp)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1+i)z+i=0$.

2°)*soit* $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_\theta: z^2-2e^{i\theta}\cos\theta\ z+e^{2i\theta}=0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de E_θ .

b) En déduire l'autre solution de E_θ.

3°) le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$.

a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un losange.

c) Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire du losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

****

<u>Exercice N°7</u>(session :juin P 2001 section : Sc exp)

1°)On considère le nombre complexe $a = -4\sqrt{3} - 4i$.
Déterminer le module et un argument de a.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -4\sqrt{3} - 4i$.
(on donnera les solutions sous forme trigonométrique)

3°) Soit $u = (-1 - i) + \sqrt{3}\,(1 - i)$

a) Calculer u^2

b) En déduire le module et un argument de u.

c) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1}\ ,\overrightarrow{e_2})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives u, $\sqrt{3}\,(1-i)$ et $(-1-i)$.

Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

****

<u>Exercice N°8</u>(session :juin contrôle 2001 section : Sc exp)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives

$$\mathbf{a} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \frac{i+\sqrt{3}}{2}$$

1°)a) Écrire sous la forme trigonométrique chacun des nombres complexes a et b.

b) Représenter les points A et B dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$.

2°)On pose $z = a + b$ et on désigne par M le point d'affixe z .

a) Montrer que le quadrilatère OBMA est un carré.

b) Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z .

c) Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

****

Exercice N°9(session :juin contrôle 2002 section : Sc exp)

Pour tout nombre complexe non nul z , on pose $w = z + \frac{4}{z}$.

1°) Soit θ un réel donné .

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z + \frac{4}{z} = 4 \cos\theta$.

b) Écrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

Dans toute la suite le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

2°)a tout nombre complexe z on associe le point M d'affixe z.

Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que le nombre complexe w soit un réel.

3°) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $2e^{i\theta}$; $4\cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$ où $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

a) Placer, pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, les points A ,B et C dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Vérifier que pour toute valeur de $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ les points A, B et C appartiennent à l'ensemble E.

c) Montrer que pour toute valeur de $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$le quadrilatère OABC est un losange.

d) Pour quelle valeur de θ ce quadrilatère est-il un carré ?

****

Exercice N°10(session :juin P 2003 section : Sc exp)

Soit m un réel non nul .

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1 + m^2) = 0$.

2°) Pour tout nombre complexe z , on pose : $f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 + m^2)z + i(1 + m^2)$.

a) vérifier que $f(i) = 0$, en déduire une factorisation de $f(z)$.

3°) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A , M' et M'' d'affixes respectives i ,i+m et i-m .

a) Vérifier que A milieu du segment $[M'M'']$.

b) Montrer que le triangle O$M'M''$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle O$M'M''$ soit équilatéral.

****

Exercice N°11(session :juin contrôle 2004 section : Sc exp)

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

b) Écrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - \sqrt{3}z^2 + 1 = 0$.

2°) Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

a) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $z^2 - (2\sin\theta)z + 1 = 0$.

Vérifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ sont solutions de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $z^4 - (2\sin\theta)z^2 + 1 = 0$.

Exercice N°12(session :juin 2005 contrôle section : Sc exp)

Soit $\in [0;2\pi[$.

1°) a) Vérifier que $\left(e^{i\theta}-i\right)^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$.

2°)On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i-e^{i\theta}$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

a) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}_1$ décrit par M_1 lorsque θ varie dans $[0;2\pi[$.

b) Calculer l'affixe du milieu I du segment$[M_1M_2]$.

c)Déduire l'ensemble $\mathcal{C}_2$ décrit par M_2 lorsque θ varie dans $[0;2\pi[$. Construire $\mathcal{C}_2$.

3°)a) Montrer que ${M_2M_1}^2=8(1-\sin\theta)$.

b) Déduire la valeur de θ pour laquelle M_2M_1 est maximale.

****

Exercice N°13(session :juin 2006 section : Sc exp)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+i\sqrt{3}z+i=0$.

2°) Soit $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

On considère l'équation dans $\mathbb{C}$: (E) $z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0$.

a) Vérifier que $(\cos\theta+i)^2=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

3°) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A , B et C les Points d'affixes respectives $a=i$, $b=\cos\theta+(1-\sin\theta)\,i$ et $c=-\cos\theta-(1+\sin\theta)\,i$

a) Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.

b) Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O .

Quel est le rayon de ce cercle ?

****

Exercice N°14(session :juin 2008 contrôle section : Sc exp)

1°)a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-z+1=0$.

b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.

c) En déduire les solutions de l'équation (E ') : $z^4-z^2+1=0$.

2°) Mettre le polynôme $P(z)=z^4-z^2+1$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

3°) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A,B , C et D les images des solutions de l'équation (E ') telles que

$Re(z_A)>0$, ; $Re(z_B)>0$ et $Im(z_D)>0$.

a) Placer les points A,B, C et D .

b) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

****

Exercice N°15(session :juin 2009 section : Sc exp)

Dans la figure ci contre , $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan , $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 2 et B est un point d'affixe z_B .

1°)Déterminer par un lecture graphique le module et un Argument de z_B . En déduire que $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

2°)a) Placer la figure le point C d'affixe $z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

3°)On se propose se déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z^3 soit un réel positif ou nul.

a) Vérifier que les points O ,A et B appartiennent à E .

b) Prouver que pour tout point M de la demi-droite $[OB)$ appartient à E .

c)Soit z un nombre complexe non nul , de module r et d'argument θ.

Montrer que z^3 soit un réel positif si et seulement si $\theta = \frac{2k\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

d) En déduire que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera.

Représenter E sur la figure .

Exercice N°16(session :juin 2010 section : Sc exp)

1°)a) Vérifier que $(5+2i)^2 = 21 + 20i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (5-4i)z - 3 - 15i = 0$.

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A,B, A' et B' les points d'affixes respectives -3i , 5-i, -3 et 1+5i .

2°)a) Placer les points A , B , A' et B' .

b) Montrer que OAA' et OBB' sont des triangles rectangles et isocèles.

3°) Soit M un point de la droite (AB) d'affixe z_M .

a) Montrer qu'il existe un réel k tel que $z_M = 5k + (2k-3)i$

b) Montrer que les droites (OM) et (A'B') sont perpendiculaires si et seulement si le point M est le milieu du segment [AB].

Vérifier que dans ce cas A'B'=2OM

****

Exercice N°17(session : juin 2011 section : Sc exp)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1°)a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b .

b) Vérifier $b^2 = a$.

2°) Soit C le point d'affixe c = a+b.

a)Placer les points A, B et C .

b) Vérifier que $c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3°) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + z - c = 0$.

a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E) .

b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

Montrer que $d = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\, e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$

c)Placer alors, le point D d'affixe d.

<u>Exercice N°18</u>(session : juin 2012   section : Sc exp)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$.

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectives 1 et $a = \sqrt{3} + i$.

1°) a)Donner la forme exponentielle de a .

b) Construire le point A .

2°) Soit B le point d'affixe $b = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$.

a)Vérifier que $b\bar{b} = 1$. En déduire que le point B appartient au cercle (C).

b) Montrer que $\frac{b-1}{a-1}$ est réel. En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c)Construire le point B dans le repéré$(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$.

3°) Soit θ un argument du nombre complexe b.

Montrer $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$.