Résolution d'équation : (E) : $X^3 + AX + B = 0$

Approche Matricielle :

On choisit quatre réelles α, β, a et b tels que : $\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ et \\ \alpha.\beta = b \end{cases}$

On pose la matrice suivante $M_f = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & a \end{pmatrix}$

Alors on aura : $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & a \end{pmatrix}^3 = (a^2 - b)\begin{pmatrix} 0 & b \\ -1 & a \end{pmatrix} - abI_2$ ou I_2 désigne la matrice unitaire.

Le polynôme caractéristique de la matrice M_f^3 est (Ec) : $x^2 - (a^3 - 3ab)x + b^3 = 0$

On pose alors $\begin{cases} b = -\frac{A}{3} \\ et \\ (a^3 - 3ab) = -B \Longrightarrow (E):\ a^3 + Aa + B = 0 \end{cases}$

Ainsi a= $\alpha + \beta$ est une racine de $(E): x^3 + Ax + B = 0$. De plus $\alpha^3\ et\ \beta^3$ sont les racines de

(Ec) : $x^2 + Bx - \frac{A^3}{27} = 0$. On note son discriminant : $\Delta = \frac{4A^3}{27} + B^2 = \frac{4A^3 + 27B^2}{27}$

Deux cas se présentent ici : 1er cas : $\Delta \geq 0$ ou 2eme cas : $\Delta < 0$

- 1er cas : $\Delta \geq 0$

$$\alpha^3 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \beta^3 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2} \Longrightarrow a = \alpha + \beta = \left(\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Les deux autres racines sont : $aj\ \ et\ \ aj^2$ ou $\mathbf{1 + j + j^2 = 0\ \ ou\ \ j = e^{-\frac{2i\pi}{3}}}$

- 2eme cas : $\Delta < 0$

$$\alpha^3 = \frac{-B+\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \beta^3 = \frac{-B-\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2} \Longrightarrow a = \alpha + \beta = \left(\frac{-B+\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-B+\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Les deux autres racines sont : $aj\ \ et\ \ aj^2$ ou $\mathbf{1 + j + j^2 = 0\ \ ou\ \ j = e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

II-Approche à l'aide d'une équation associée :

On choisit trois réelles R, m et W tels que : $\begin{cases} R^2 = \frac{4|A|}{3} \\ m = \frac{4B}{R^3} \\ \text{RW est une solution de (E)} \end{cases}$

Alors W vérifie $\begin{cases} W^3 + \frac{3}{4}W + \frac{m}{4} = 0 \;\; si \;\; A > 0 \;\; (E_1^A) \\ ou \\ W^3 - \frac{3}{4}W + \frac{m}{4} = 0 \; si \; A < 0 \;\; (E_2^A) \end{cases}$

II-1-Etude de l'équation associée : $(E_1^A) : W^3 + \frac{3}{4}W + \frac{m}{4} = 0$

On pose sh (3Ө) = -m ainsi on aura $4sh(\Theta)^3 + 3sh(\Theta) = sh(3\Theta) = -m$

Donc $W_0 = sh(\Theta)$ est une solution réelle de $(E_1^A) : W^3 + \frac{3}{4}W + \frac{m}{4} = 0$

On note W_1 et W_2 les deux autres solutions alors ils vérifient une équation de second degré

Caractéristique $(E_c^{A1}) : W^2 + W_0 . W + b = 0$ tel que b $=-\frac{m}{4W_0}$

- Résolution de $(E_c^{A1}) : W^2 + W_0 . W + b = 0$ tel que b $=-\frac{m}{4W_0}$

On note son discriminant $\delta_c^1 = W_0^2 + \frac{m}{W_0} = -3ch(\Theta)^2 < 0$ donc

$W_1 = \frac{-sh(\Theta)+\mathrm{i}ch(\Theta).\sqrt{3}}{2} = sh(\Theta + \mathrm{i}\frac{2\pi}{3})$ et $W_1 = \frac{-sh(\Theta)-\mathrm{i}ch(\Theta).\sqrt{3}}{2} = sh(\Theta - \mathrm{i}\frac{2\pi}{3})$

Conclusion1 : On a une solution réelle $W_0 = sh(\Theta)$ et deux complexes

$$\boldsymbol{W_1 = \frac{-sh(\Theta)+\mathrm{i}ch(\Theta).\sqrt{3}}{2} = sh(\Theta + \mathrm{i}\frac{2\pi}{3})} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{W_1 = \frac{-sh(\Theta)-\mathrm{i}ch(\Theta).\sqrt{3}}{2} = sh(\Theta - \mathrm{i}\frac{2\pi}{3})}$$

Avec sh (3Ө) = -m

- II-2-Etude de l'équation associée : $(E_2^A): W^3 - \frac{3}{4}W + \frac{m}{4} = 0$

Deux cas se posent ici : 1er cas : $m^2-1 \leq 0$ ou 2eme cas : $m^2-1 > 0$

- 1er cas : $m^2-1 \leq 0$

Si $m^2-1 \leq 0$ alors il existe un réel Θ tel que : $\sin(3\Theta) = m$

Donc on a : $4\sin(\theta)^3 - 3\sin(\theta) = -\sin(3\theta) = -m$

Donc $W_0 = \sin(\theta)$ est une solution réelle de $(E_1^A): W^3 - \frac{3}{4}W + \frac{m}{4} = 0$

On note W_1 *et* W_2 les deux autres solutions alors il vérifie une équation de second degré caractéristique $(E_c^{A1}) : W^2 + W_0.W + b = 0$ tel que $b = -\frac{m}{4W_0}$

Résolution de $(E_c^{A2}) : W^2 + W_0.W + b = 0$ tel que $b = -\frac{m}{4W_0} = -\frac{\sin(3\theta)}{4\sin(\theta)}$

On note son discriminant $\delta_c^1 = W_0^2 + \frac{m}{W_0} = 3\cos(\theta)^2 > 0$ donc

$W_1 = \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})$ et $W_1 = \sin(\theta - \frac{2\pi}{3})$

Conclusion 2 : On a 3 solutions réelles

$\boldsymbol{W_0 = \sin(\theta)}$; $\boldsymbol{W_1 = \sin(\theta + \frac{2\pi}{3})}$ **et** $\boldsymbol{W_2 = \sin(\theta - \frac{2\pi}{3})}$ **avec** $\boldsymbol{\sin(3\Theta) = m}$

- 2eme cas : $m^2-1>0$

Si $m^2-1 > 0$ donc $|m| > 1$

On pose : $\mathrm{ch}(3\Theta) = |m|$ et $W_0 = -sign(m).\mathrm{ch}(\Theta)$

L'étude de l'équation Caractéristique $(E_c^{A2}) : W^2 + W_0.W + b = 0$ tel que $b = -\frac{m}{4W_0}$

Donne un discriminant : $\delta_c^2 = W_0^2 + \frac{m}{W_0} = -3ch(\theta)^2 < 0$ donc

Conclusion 3 : On a une solution réelle et deux complexes

$\boldsymbol{W_0 = -sign(m).\mathrm{ch}(\Theta)}$; $\boldsymbol{W_1 = -sign(m).\mathrm{ch}(\theta - i\frac{2\pi}{3})}$

et $\boldsymbol{W_2 = -sign(m).\mathrm{ch}(\theta + i\frac{2\pi}{3})}$ **avec :** $\boldsymbol{\mathrm{ch}(3\Theta) = |m|}$

II-3-Etude de l'équation associe : (E) : $X^3 + AX + B = 0$

Trois cas se posent ici : 1er cas : A<0 ou 2eme cas : A > 0 ou 3eme cas : A=0

- 1er cas : A< 0

$R^2 = \frac{4|A|}{3} = \frac{4A}{3}$ $et\ \ m = \frac{4B}{R^3}$ Alors : $m^2 - 1 = -\frac{27B^2}{4A^3} - 1 = -\frac{4A^3+27B^2}{4A^3} = -\frac{\Delta}{4A^3}$

Avec $\Delta = 4A^3 + 27B^2$ donc deux sous cas se présente

$$\boldsymbol{\Delta = 4A^3 + 27B^2 \geq 0 \quad ou \quad \Delta = 4A^3 + 27B^2 < 0}$$

Si $m^2 - 1 = -\frac{27B^2}{4A^3} - 1 \leq 0$ donc $\frac{\Delta}{4A^3} \geq 0$ $et\ A < 0$ donc $\Delta = 4A^3 + 27B^2 \geq 0$

Conclusion : Alors on a trois solutions réelles

$$X_0 = Rsin(\Theta)\ ;\ X_1 = Rsin(\Theta + \frac{2\pi}{3}) \quad et\ \ X_2 = Rsin(\Theta - \frac{2\pi}{3})$$

$$Avec\ \ R^2 = \frac{4|A|}{3} = -\frac{4A}{3}\ \ et\ \ m = sin\,(3\Theta) = \frac{4B}{R^3}$$

Si $m^2 - 1 = -\frac{27B^2}{4A^3} - 1 > 0$ donc $\frac{\Delta}{4A^3} > 0$ $et\ A < 0$ donc $\Delta = 4A^3 + 27B^2 < 0$

Conclusion : On a une solution réelle et deux complexes

$$X_0 = -R.sign(\mathrm{m}).\,\mathrm{ch}\,(\Theta);\ X_1 = -R.sign(\mathrm{m}).\,\mathrm{ch}(\Theta - \mathrm{i}\frac{2\pi}{3})$$

$$\text{et}\ \ X_2 = -R.sign(\mathrm{m}).\,\mathrm{ch}(\Theta + \mathrm{i}\frac{2\pi}{3}) \quad \text{avec :}\ \ \mathrm{ch}\,(3\Theta) = |m|$$

- 1er cas : A > 0

Conclusion : On a une solution réelle $X_0 = R.sh(\Theta)$ et deux complexes

$$X_1 = \mathrm{R}.\frac{-sh(\Theta)+\mathrm{i}ch(\Theta).\sqrt{3}}{2} = R.sh(\Theta + \mathrm{i}\frac{2\pi}{3}) \quad \text{et}\ \ X_2 = \mathrm{R}.\frac{-sh(\Theta)-\mathrm{i}ch(\Theta).\sqrt{3}}{2} = R.sh(\Theta - \mathrm{i}\frac{2\pi}{3})$$

Avec : sh (3Θ) = -m

- 3er cas : A = 0

Ce cas revient a l'équation simple des racines cubiques de $(-B)$

Qui sont $(-B)^{\frac{1}{3}}$, $j(-B)^{\frac{1}{3}}$ et $j^2(-B)^{\frac{1}{3}}$