Correction De La session de contrôle juin 2012 section maths
propose par Ali ben Massoud Lycée ibn Sina el Kabaria Tunis

Exercice 1.

1) $p(\overline{A})=0,6$: VRAI ; justification : d'après l'arbre, $p(A)=0,4$, donc $p(\overline{A})=1-0,4=0,6$

2) $p(\overline{B}/A)=0,7$: VRAI ; justification : d'après l'arbre, $p(B/A)=0,3$, donc $p(\overline{B}/A)=1-0,7=0,3$

3) $p(B)=0,7$: FAUX ; justification :
$p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=0,4\times 0,3+0,6\times 0,4=0,36$

4) $p(A\cup B)=0,64$: VRAI ; justification : 1ère méthode :
$p(A\cup B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)+p(B\cap \overline{A})=0,4\times 0,3+0,4\times 0,7+0,6\times 0,4=0,64$
2ème méthode : $p(A\cup B)=1-p(\overline{A}\cap \overline{B})=1-0,6\times 0,6=0,64$

Exercice 2.

1) Le discriminant de l'équation est
$\Delta=(1+i)^2a^2-4i^2a^2=(1+2i+i^2)a^2-4ia=(2i-4i)a^2=-2ia^2$
1ère méthode :
$$\Delta=2a^2e^{-i\frac{\pi}{2}}=\left(a\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2=\left(a\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\right)^2=\left(a\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2=(a-ia)^2$$
Les deux solutions de l'équation sont donc :
$$z_1=\frac{(1+i)a+(1-i)a}{2}=\frac{2a}{2}=a\ ;\ z_2=\frac{(1+i)-(1-i)a}{2}=\frac{2ia}{2}=ia$$
2ème méthode : $\Delta=-2ia^2$; on cherche x et y tels que $(x+iy)^2=-2ia^2$; ce qui équivaut à : $x^2-y^2+2ixy=-2ia^2$; $x^2-y^2=0$ et $xy=-a^2$; une solution est $x=a, y=-a$; d'où $\Delta=(a-ia)^2$; fin comme 1ère méthode.

2) a) Le triangle OAB est rectangle isocèle en O : en effet $OA=|a|=a$ et
$OB=|ia|=|i||a|=a$; $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\arg(ia)-\arg(a)=\frac{\pi}{2}$

b) Soit z_C l'affixe de C ; on a $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc $z_C=z_a+z_b=a+ia=a(1+i)$

3) a) P est image de A par la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc
$$z_P=a\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b) Q est image de C par la rotation de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ donc
$$z_Q-z_A=\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)(z_C-z_A)=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)ia$$

$$z_Q = a + \frac{1}{2}ia - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2a = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \frac{1}{2}ia$$

c) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BP}$ est $z_{\overrightarrow{BP}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - ia = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)a$;

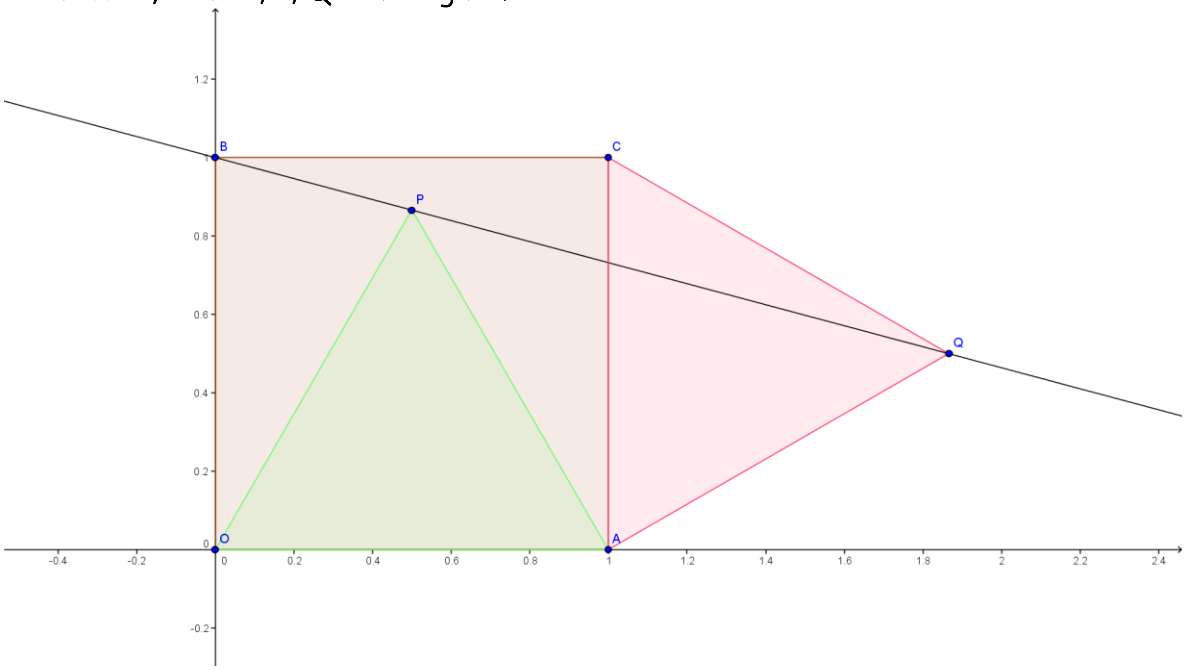
de même :

$z_{\overrightarrow{BQ}} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)a - ia = \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2} - \frac{1}{2}i\right)a$; leur quotient est :

$$\frac{\frac{\sqrt{3}+2}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-2}{2}} = \frac{\sqrt{3}+2-i}{1+i(\sqrt{3}-2)} = \frac{(\sqrt{3}+2-i)(1-i(\sqrt{3}-2))}{1+(\sqrt{3}-2)^2} = \frac{\sqrt{3}-3i+2i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3}+4i-i-\sqrt{3}+2}{8-4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4}{8-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

Le rapport des affixes des deux vecteurs étant un réel, ces deux vecteurs sont colinéaires, donc B, P, Q sont alignés.



Remarque : j'ai traité la question c) par les affixes, parce que les questions précédentes le suggéraient ; mais il y a une méthode beaucoup plus simple, accessible aux élèves de collège :

$B\hat{O}P = B\hat{O}A - P\hat{O}A = 90° - 60° = 30°$; le triangle BOP est isocèle en O, car OP = OA = OB;

Donc $\hat{BPO} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$; de même $\hat{PAC} = 30°$; $\hat{CAQ} = 60°$ donc

$\hat{PAQ} = 30° + 60° = 90°$; le triangle APQ est donc rectangle, et isocèle car AP=AQ=a ;

donc $\hat{APQ} = 45°$, et $\hat{BPQ} = 75° + 60° + 45° = 180°$: les points B, P, Q sont alignés.

Exercice 3.

1) a) $7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9$ [1] , donc (9,-3) est une solution particulière.

b) Un couple d'entiers (x, y) est solution si et seulement si 7x + 18y = 9 , ce qui équivaut, en soustrayant [1], à 7(x – 9) + 18(y+3) = 0 , ou encore 7(x-9) = -18(y+3)

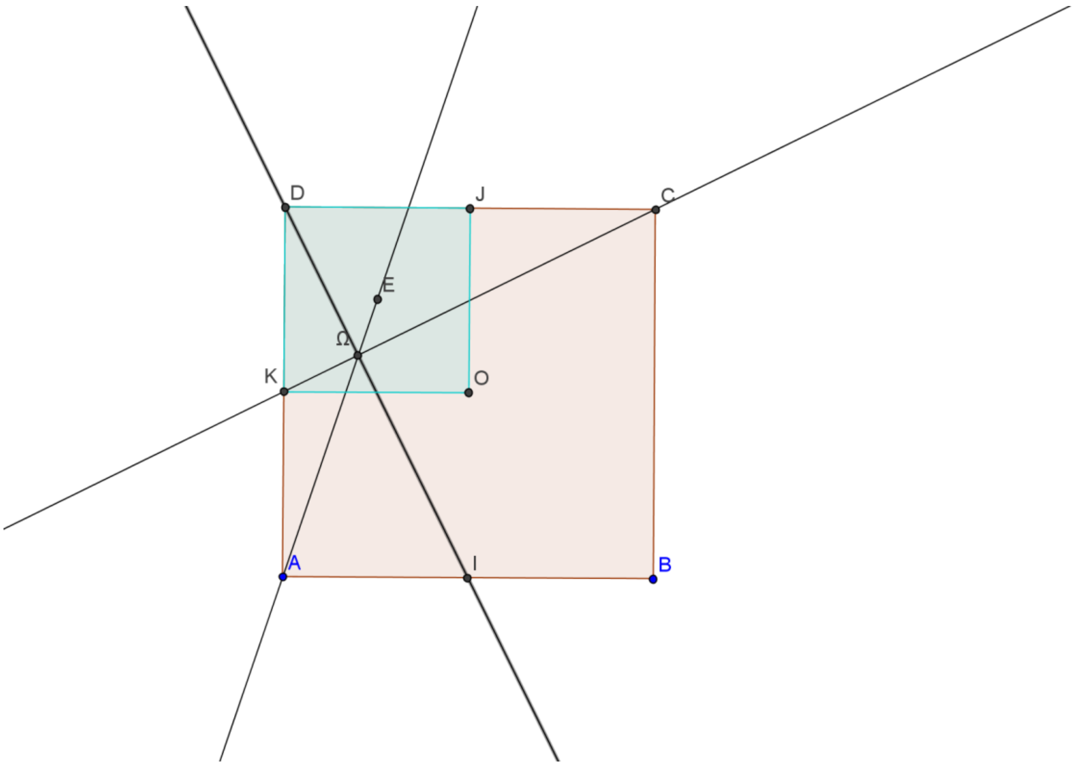
18 divise7(x-9) et on a 18et7premier entre eux donc d'après le théorème de gauss 18 divise (x-9); il est donc nécessaire qu'il existe un entier k tel que x-9= 18k, soit x = 18k+9 ; alors on a

-18(y+3)= 7×18k, soit y = -7k - 3 ; les couples solutions sont donc nécessairement de la forme (18k + 9, -7k-3) (k entier quelconque). Réciproquement on vérifie que tout couple de cette forme est solution, car 7(18k+9) + 18(-7k-3) = -7×18k+7×18k+63-54 = 9

2) n est solution du système si et seulement si il existe a et b entiers tels que n = 6 + 7a = 15 +18b , soit par soustraction 9 = 18b-7a, ou 7a-18b = 9.

D'après la question 1, ceci équivaut à a = x = -18k + 9 et b = -y = -7k+3 ; on conclut que n est solution si et seulement si n = 6 + 7(-18k+9) = -126k + 69 (*on peut vérifier, par l'autre égalité, qu'on obtient bien la même expression : n = 15 + 18(-7k+3) = -126k + 69*)

Exercice 4.



1) S([AB]) = [OJ] ; $OJ = \frac{1}{2}BC$ donc le rapport de S est $\frac{1}{2}$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc l'angle de S est $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Une similitude conserve les angles ; la droite (BC) est perpendiculaire à (AB) en B, donc S(BC) est la perpendiculaire à (OJ) en J, c'est-à-dire (CD).

(AC) fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec (AB), en A, donc S(AC) fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec OJ, en O ; c'est donc le droite (OD) (ou (BD)).

b) $C = (BC) \cap (AC)$ donc $S(C) = S(BC) \cap S(AC) = (CD) \cap (BD) = D$

3) a) S(A)=O, S(B)=J, S(C)=D, donc l'image du carré ABCD est le carré ayant pour sommets O, J, D ; son 4ème sommet est K.

b) S(ABCD) = OJDK donc S(D)=K.

c) Soit Ω le centre de S ; SoS est la similitude de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$; or SoS(C)=S(D)=K ; donc $\overrightarrow{\Omega K} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega C}$; donc Ω est le barycentre de (K,4) et (C,1).

d) SoS(A) = S(O) ; O est le centre du carré ABCD donc S(O) est le centre du carré OJDK, c'est-à-dire E.

e) D'après c), $\overrightarrow{K\Omega} = \frac{1}{5}\overrightarrow{KC}$, ce qui permet de placer Ω sur la figure.

Remarque : si on exige une construction à la règle et au compas, on peut remarquer que, l'angle de la similitude étant $\frac{\pi}{2}$, $(\Omega C) \perp (\Omega D)$ et $(\Omega K) \perp (\Omega D)$, c'est-à-dire que les triangles ΩCD et ΩKD sont rectangles en Ω ; Ω est donc le 2ème point d'intersection des cerces de diamètres [DC] et [DK].

4) E = SoS(A), et SoS a pour angle π, donc Ω, A, E sont alignés : (AE) passe par Ω ; de même K = SoS(C) donc (KC) passe par Ω ; d'autre part S(C) = D, donc $(\Omega C) \perp (\Omega D)$, et la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme DKC en AID, donc $(DI) \perp (KC)$, ou $(DI) \perp (\Omega C)$; (ΩD) et (DI) sont perpendiculaires à (ΩC) en Ω, donc sont confondues, donc Ω est sur (DI). Conclusion : (AE), (CK) et (DI) sont concourantes en Ω.

Exercice 5.

1) a) On sait que $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \to 0} g(x) = 1 + 0 - 0 = 1$

$g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$; on sait que $\lim_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

La dérivée de g est définie par $g'(x) = 1 - \left(1.\ln x + x.\frac{1}{x}\right) = -\ln x$; elle s'annule donc en 1, est positive sur]0,1[, négative sur]1,+∞[; g(1) = 2 ; d'où le tableau de variation de g :

x	0 1 +∞

g'(x)		+	0	-	
g(x)	1	↗	2	↘	$-\infty$

b) Sur]0, 1] g(x) croît de 1 à 2, donc ne prend pas la valeur 0 ; sur [1, +∞[, g est continue, et g(x) décroît de 2, valeur positive, à -∞, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle prend une et une seule fois la valeur 0, pour une valeur x_0 de la variable. Un calcul à la calculatrice montre que g(3,5) ≈ 0,115 > 0, et g(3,6) ≈ -0,11 < 0 ; donc $3,5 \le x_0 \le 3,6$

c) On en déduit que g est strictement positive sur $]0, x_0[$, nulle en x_0, négative sur $]x_0,+\infty[$

2) a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2-x^2.2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2-x^2\ln(x^2)}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; la fonction ln croît moins vite que toute fonction polynôme donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

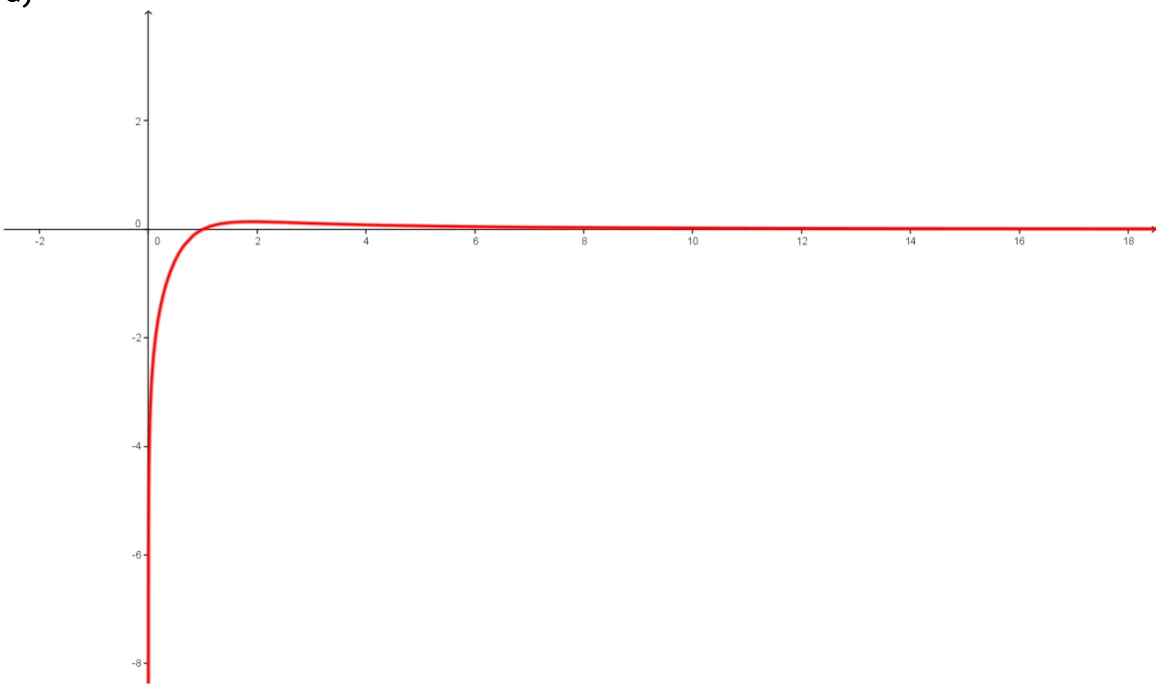
f'(x) est du signe de $g(x^2)$, donc strictement positive si $x^2 < x_0$, c'est-à-dire si $x < \sqrt{x_0}$; nulle si $x = \sqrt{x_0}$, strictement négative si $x > \sqrt{x_0}$; d'où le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{x_0}$		+∞
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(\sqrt{x_0})$	↘	0

c) $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{\ln(\sqrt{x_0})}{1+x_0} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln x_0}{1+x_0}$; or x_0 est la solution de $1 + x_0 - x_0\ln x_0 = 0$, donc

$1 + x_0 = x_0\ln x_0$, donc $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{\ln(\sqrt{x_0})}{1+x_0} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln x_0}{x_0\ln x_0} = \dfrac{1}{2x_0} \approx \dfrac{1}{2\times 3,6} \approx 0,14$

d)



3) $a_{n+1} - a_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t)dt$; $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$ sont dans]0, 1[; f(1) = 0 et f est strictement croissante sur]0, 1[, donc f est strictement négative sur $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, donc $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)dt < 0$, donc $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t)dt > 0$: la suite (a_n) est croissante.

b) Sur]0, 1[, on a 1 < 1+x² < 2 donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2} < 1$, et lnx <0, donc $\ln x < \frac{\ln x}{1+x^2} < \frac{\ln x}{2}$

c) D'après b), $\int_1^{\frac{1}{n}} \ln t dt \le a_n \le \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{n}} \ln t dt$

Une primitive de ln*t* est *t*.ln*t* – *t* (n'est pas forcément connu par cœur des élèves, mais ils le retrouvent en faisant une intégration par parties). Donc

$\int_1^{\frac{1}{n}} \ln t dt = \left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) - (1\times 0 - 1) = 1 - \frac{1+\ln n}{n}$; donc $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \le a_n \le 1 - \frac{1+\ln n}{n}$

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) = 1$; la suite (a_n) est donc majorée par 1, et croissante, donc elle converge ; et sa limite appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$