Exercice 1 :

1. Faux .

En effet :

La courbe (C') de la dérivée f' est au dessus de l'axe des abscisses

donc pour tout entier x de $\left[\frac{1}{2},5\right]$, f'(x) > 0 .

D'où la courbe (C) de f n'admet aucune tangente de coefficient directeur -1.

2. Vrai .

En effet :

A(1,0) appartient à (C) équivaut à f(1) = 0 et B(3,1) appartient à (C) équivaut à f(3) = 1.

L'aire de la partie hachurée est $\int_1^3 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 0 = 1$.

3. Vrai.

En effet :

f' est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},5\right]$. De plus , $\frac{1}{2} \in f'\left(\left[\frac{1}{2},5\right]\right)$. Donc l'équation , f'(x) = $\frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2},5\right]$. Et par suite, la courbe (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

4. Vrai .

En effet :

f' est dérivable sur [1, 3] et pour tout x de [1,3] , $\left|f'(x)\right| \leq f'(1) \leq 1$ donc pour tout a et b de [1,3] , $\left|f(b) - f(a)\right| \leq \left|b - a\right|$.

Exercice 2 :

1. a) CIJ est un triangle isocèle en C tel que $\left(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $r_C(I)=J$.

   b) $r_B\circ t(I)=r_B(t(I))=r_B(A)$. Comme BAJ est un triangle isocèle en B tel que $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

   alors $r_B(A)=J$.

   Par suite : $r_B\circ t(I)=J$.

   c) On a : $r_B\circ t$ est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'une translation donc $r_B\circ t$ est une

   rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

   Or r_C est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et $r_B\circ t(I)=r_C(I)$

   Donc $r_B\circ t=r_C$.

2. Soit K =t(C).

$$r_B\circ t(C)=r_C(C)\Leftrightarrow r_B(t(C))=C\Leftrightarrow r_B(K)=C\Leftrightarrow\begin{cases}BK=BC\\\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}BC=BK\\\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}.$$

3. a) On a : O est le milieu de [AC] don $S_O(A)=C$.

   Et t(C) = k $\Leftrightarrow\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow$ IAKC est un parallélogramme.

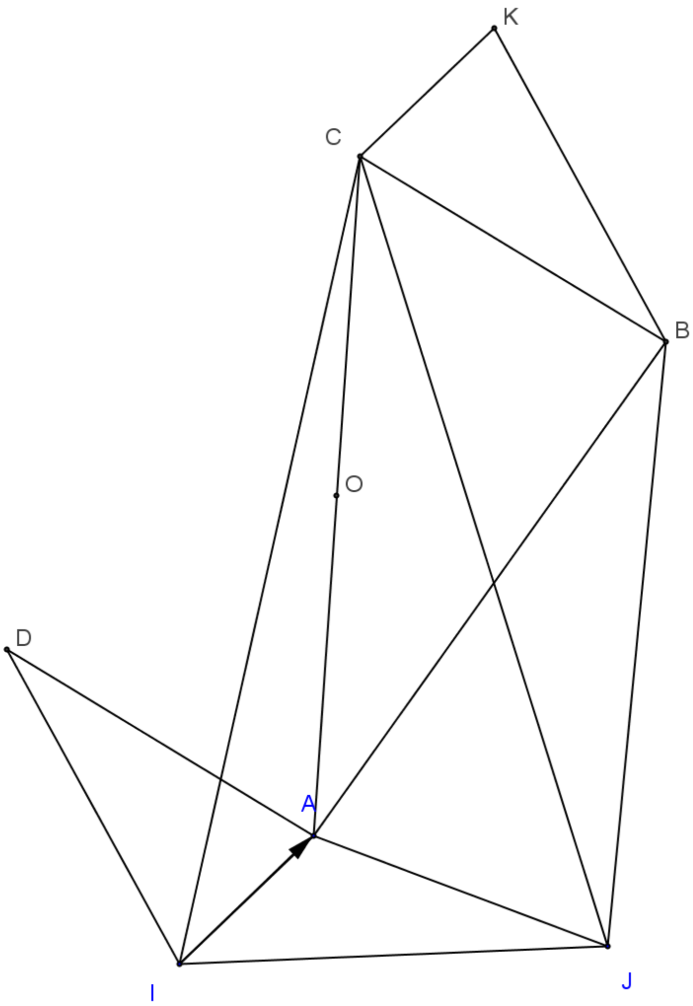
   Comme O est le milieu de [AC] alors O est le milieu de [IK] d'où $S_O(I)=K$.

   Soit $D'=S_O(D)$, $\begin{cases}DA=DI\\\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DI}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$ donc $\begin{cases}D'C=D'K\\\left(\overrightarrow{D'C},\overrightarrow{D'K}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$.

   Or $\begin{cases}BC=BK\\\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$ alors D' = B. Ainsi, $S_O(D)=B$.

On conclue que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale S_0 est le triangle BKC.

b) O est le milieu de [AC] et de [DB] donc ABCD est un parallélogramme.



Exercice 3 :

1. a) Comme $AE \neq 0$ et $AF \neq 0$, il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F. $\frac{AF}{AE} = \frac{3}{2}$ donc le rapport de S est $\frac{3}{2}$.

$\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{-3}{-2i}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(-\frac{3}{2}i\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc l'angle de S est $-\frac{\pi}{2}$.

b) L'image de la droite $(O,\vec{u})$ par S est la perpendiculaire à $(O,\vec{u})$ passant par S(E) = F donc

$S\left(\left(O,\vec{u}\right)\right)=\left(O,\vec{v}\right)$.

c) N est un point de $(O,\vec{u})$ donc S(N) = N' est un point de $S\left(\left(O,\vec{u}\right)\right)=\left(O,\vec{v}\right)$.

D'autre part, S(N) = N' $\Rightarrow \left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AN'}\right)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc le triangle ANN' est rectangle en A.

Or ANP est rectangle en A et P appartient à $(O,\vec{v})$ alors N' = P.

Ainsi, S(N) = P.

d) L'écriture complexe de S est :

$$z'-z_A=\frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)\Leftrightarrow z'-3-2i=-\frac{3}{2}i(z-3-2i)\Leftrightarrow z'-3-2i=-\frac{3}{2}iz+\frac{9}{2}i-3$$

$$\Leftrightarrow z'=-\frac{3}{2}iz+\frac{13}{2}i.$$

2. a) Soit N(x, 0) et P(0, y) , S(N) = P $\Leftrightarrow iy=-\frac{3}{2}ix+\frac{13}{2}i\Leftrightarrow 2y=-3x+13\Leftrightarrow 3x+2y=13$.

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): 3x + 2y = 13.

On a : 3.1 + 2.5 = 13 donc (1,5) est une solution particulière de l'équation (E).

D'où 3(x -1) + 2(y – 5) = 0 équivaut à 3(x- 1) = -2(y – 5).

Comme $3\wedge 2=1$ et 2 divise 3(x - 1) alors 2 divise x – 1 donc il existe un entier k tel que x – 1 = 2k ou encore x = 2k + 1.

3.2k = -2(y – 5) donc y – 5 = -3k d'où y = -3k + 5.

Inversement : si (x, y) = (2k + 1, -3k + 5) avec $k\in\mathbb{Z}$ alors 3x + 2y = 3(2k + 1) + 2(-3k + 5) = 6k+3-6k+10=13

Donc N(2k + 1 , 0) et P(0, -3k + 5) avec $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 4:

1. a) p(X > 10) = $e^{-10\times 0125}=e^{-1,25}\simeq 0,286$.

b) p(X < 0,5) = 1 - $e^{-\frac{1}{2}\times 0,125} = 1 - e^{-0,0625} \simeq 0,060$.

2. a) Soit Y la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p(X < 10) = 0,286.

$$p_1 = 1 - p(Y=0) = 1 - (1 - 0,286)^n = 1 - (0,714)^n.$$

b) $p_1 \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - (0,714)^n \geq 0,999 \Leftrightarrow (0,714)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n\ln(0714) \leq \ln(0,001)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0714)}$

Or $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0714)} \simeq 25,5$, donc n = 26 est le nombre minimum d'oscilloscopes que le responsable peut commander.

Exercice 5:

I] Soit $f_2(x) = x^2 - \ln x$.

1. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$ donc la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

c) f_2 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x > 0, $f_2'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x} = \dfrac{2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{x}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	↗	$+\infty$

2. a) On a, pour tout x > 0 : $M(x,\ln x)$ et $M_2(x,x^2)$ donc $MM_2 = |y_{M_2} - y_M| = |x^2 - \ln x|$.

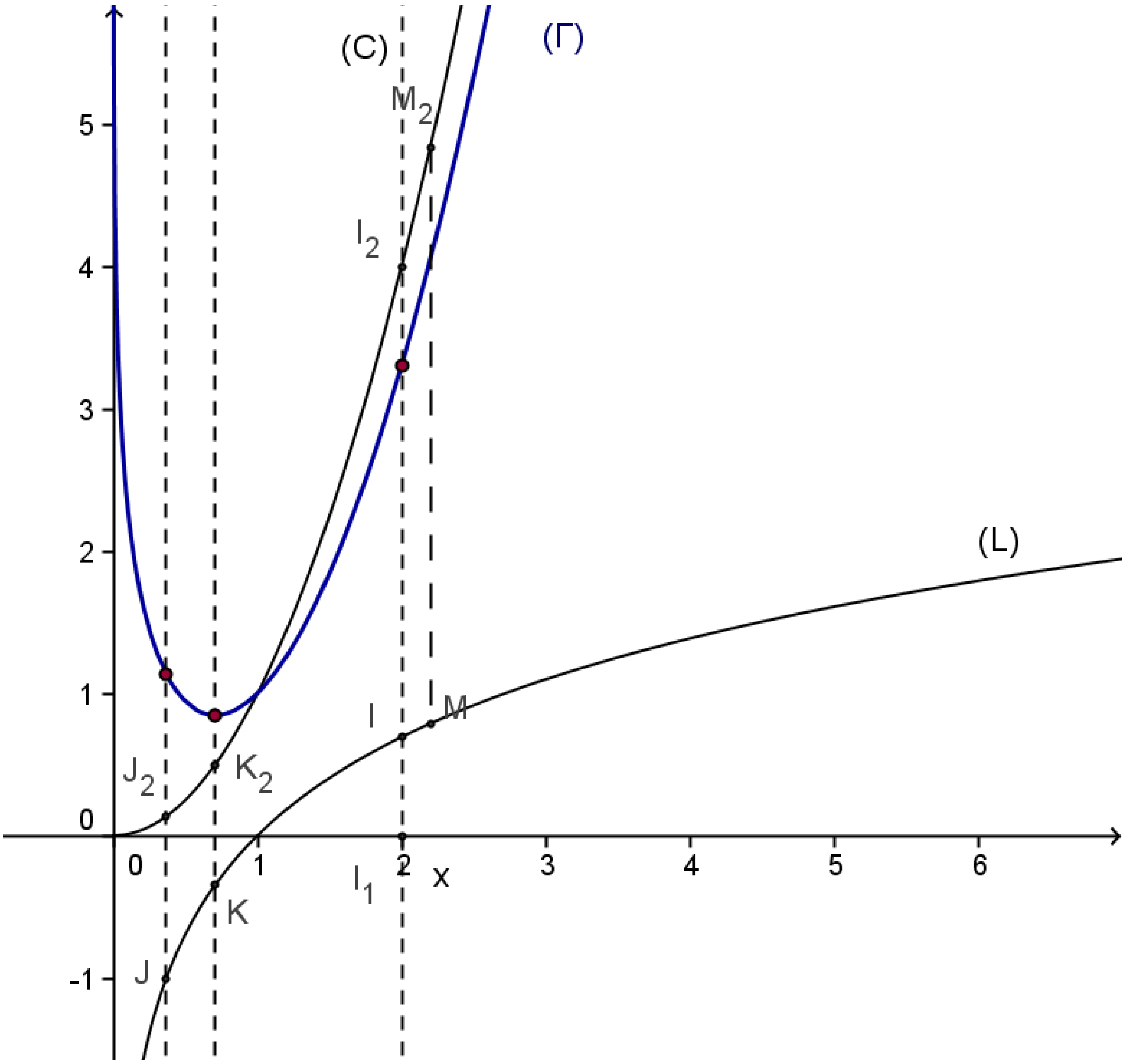
Comme (C) est au dessus de (Γ) alors pour tout x > 0, $x^2 > \ln x$ donc $MM_2 = x^2 - \ln x = f_2(x)$.

b) La droite d'équation x = 2 coupe (Γ) en I et coupe (C) en I_2 , on a donc f(2) = II_2.

La droite d'équation x = $\frac{1}{e}$ coupe (Γ) en J et coupe (C) en J_2 , on a donc $f\left(\frac{1}{e}\right) = JJ_2$.

La droite d'équation x = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ coupe (Γ) en K et coupe (C) en K_2 , on a donc $f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = KK_2$.

c) Voir figure



II] 1) a) Pour tout x > 0 , $f_k'(x) = kx^{k-1} - \frac{1}{x} = \frac{kx^k - 1}{x}$.

b) $f_k'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{kx^k-1}{x}=0 \Leftrightarrow kx^k=1 \Leftrightarrow x^k=\frac{1}{k} \Leftrightarrow x=\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

D'autre part : $f_k'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{kx^k-1}{x}>0 \Leftrightarrow kx^k-1>0 \Leftrightarrow x^k>\frac{1}{k} \Leftrightarrow x>\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

D'où le tableau de signe de f_k' :

x	0		$\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		-	0	+	

Ainsi f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)=\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)^k-\ln\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\ln k=\frac{1+\ln k}{k}$.

c) Pour tout x > 0, $MM_k=\left|y_{M_k}-y_M\right|=\left|x^k-\ln x\right|=x^k-\ln x=f_k(x)$ car $x^k\geq x^2>\ln x$ donc la valeur minimale de MM_k est $\frac{1+\ln k}{k}$.

2. a) pour tout $k\geq 2$, $\ln(u_k)=\ln\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1}{k}\right)=-\frac{\ln k}{k}$.

On a $\lim\limits_{k\to+\infty}\ln(u_k)=\lim\limits_{k\to+\infty}-\frac{\ln k}{k}=0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=\lim\limits_{k\to+\infty}e^{\ln(u_k)}=e^0=1$.

b) $AA_k=\sqrt{(u_k-1)^2+(f_k(u_k)-0)^2}=\sqrt{(u_k-1)^2+\left(\frac{1+\ln k}{k}\right)^2}$

donc $\lim\limits_{k\to+\infty}AA_k=\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt{(u_k-1)^2+\left(\frac{1+\ln k}{k}\right)^2}=\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt{(u_k-1)^2+\left(\frac{1}{k}+\frac{\ln k}{k}\right)^2}=0$