Correction du sujet de bac session principale juin 2012

SECTION :Mathématiques

PROFESSEUR : ali ben massoud

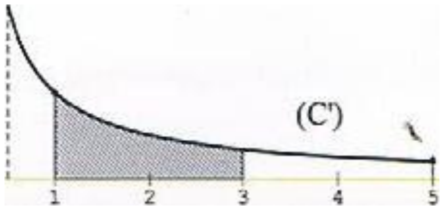
Exercice 1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\left[\frac{1}{2};5\right]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1 ; 0) et B(3 ; 1).

Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée $f\,'$de la fonction f.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.



1) (C) admet une tangente de coefficient directeur – 1.

2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.

3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

4) Pour tous a et b de [1 ; 3], $|f(b)-f(a)|\leq|b-a|$.

CORRECTION

1. FAUX

La figure représente la courbe (C') de la dérivée $f\,'$de la fonction f.

La tangente au point de (C) d'abscisse x_0 a pour coefficient directeur $f\,'(x_0)$, d'après la figure, pour tout x de [1 ; 5] $f\,'(x) > 0$ donc il n'existe pas de $x_0 \in [1;5]$ tel que $f\,'(x_0) = -1$ donc (C) n'admet pas de tangente de coefficient directeur – 1.

2. VRAI

l'aire hachurée est égale à $\int_1^3 f\,'(t)\,dt = f(3)-f(1)$

f est une fonction telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1 ; 0) et B(3 ; 1).

donc $f(1) = 0$ et $f(3) = 1$ donc l'aire hachurée est égale à 1 – 0 = 1

L'aire de la partie hachurée est égale à 1.

3. VRAI

$f\,'$ est une fonction continue strictement décroissante sur [1 ; 3], $f\,'(1) > \frac{1}{2}$ et $f\,'(3) < \frac{1}{2}$ donc l'équation $f\,'(x) = \frac{1}{2}$, admet une seule solution α sur [1 ; 3].

La tangente au point de (C) d'abscisse α a pour coefficient directeur $f\,'(\alpha)$ donc (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

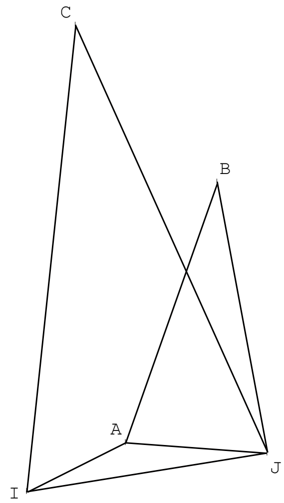
4. VRAI

Le repère est orthonormé donc $f\,'(1) = 1$ or la fonction $f\,'$ est décroissante sur [1 ; 3] donc pour tout x de [1 ; 3], $0 \leq f\,'(x) \leq 1$

f est dérivable sur [1 ; 3], pour tout x de [1 ; 3], $|f\,'(x)| \leq 1$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous a et b de [1 ; 3], $|f(b)-f(a)|\leq|b-a|$.

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ et $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.

1) *a*) Déterminer $r_C(I)$.

b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.

c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

2) Soit $K = t(C)$.

Montrer que BC = BK et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

a) Soit O le milieu de [AC].

Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

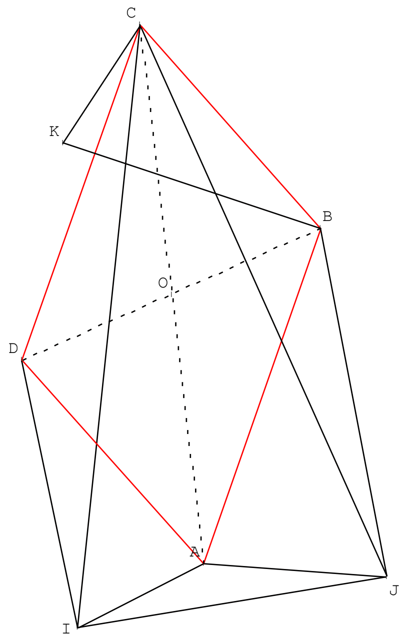
CORRECTION

1) *a*) CIJ est un triangle isocèle en C donc CI = CJ tel que $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ donc $r_C(I) = J$.

b) t est la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ donc $t(I) = A$ donc $r_B \circ t(I) = r_B(A)$.

BAJ est un triangle isocèle en en B donc BA = BJ tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

donc $r_B(A) = J$ donc $r_B \circ t(I) = J$.



c) $r_B \circ t$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{6}$ donc est une rotation de centre Ω.

$r_B \circ t(I) = J$ donc ΩI = ΩJ et $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ donc Ω est le point d'intersection de la médiatrice de [IJ] et de l'arc capable de $\frac{\pi}{6}$ donc Ω est unique or CI = CJ tel que $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ donc Ω = C donc $r_B \circ t = r_C$.

2) Soit $K = t(C)$ et $r_B \circ t(C) = r_C(C) = C$ donc $r_B(K) = C$ donc BC = BK et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

a) DIA est isocèle en D donc DI = DA et de plus $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

$K = t(C)$ donc $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK}$ donc IA = KC.

$r_B(K) = C$ donc BC = BK et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$, le triangle BKC est isocèle en B et $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

Les triangles DIA et CKB sont isocèles et directs, IA = KB et $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}) \equiv (\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}) \quad [2\pi]$

O est le milieu de [AC] donc par la symétrie s de centre O : $A \to C$.

Une symétrie centrale est un déplacement donc transforme le triangle isocèle direct DIA tel que $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ en un triangle isocèle direct D'I'C tel que $(\overrightarrow{D'I'}, \overrightarrow{D'C}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ donc l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC, $s(D) = B$ et $s(I) = K$

b) $s(D) = B$ donc O est le milieu de [BD], or O est aussi le milieu de [AC] donc le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui ont le même milieu O donc est un parallélogramme.

Exercice 3 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point de coordonnées (3 ; 2).

Soit N un point de l'axe $(O; \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O; \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1) *a*) Soit les points E(3 ; 0) et F(0 ; 2).
Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F. Donner son rapport et son angle.

b) Déterminer l'image de l'axe $(O; \vec{u})$ par S.

c) En déduire que S(N) = P.

d) Soit M un point d'affixe *z* et M' le point d'affixe *z*' tel que M' = S(M).
Montrer que $z' = -\dfrac{3}{2}\,i\,z + \dfrac{13}{2}\,i$.

2) *a*) On note *x* l'abscisse du point N et *y* l'ordonnée du point P. Montrer que 3 *x* + 2 *y* = 13.

b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

CORRECTION

1. *a*. E ≠ F donc il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F. Son rapport est $\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{3}{2}$

Son angle est $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})$ or $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) \ [2\pi]$

$\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \dfrac{2i - (3+2i)}{3 - (3+2i)} = \dfrac{-3}{-2i} = \dfrac{-3 \times i}{-2i \times i} = -\dfrac{3}{2}i$ soit $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}) \equiv \arg\left(-\dfrac{3}{2}i\right) \ [2\pi]$ donc l'angle de la similitude S est $-\dfrac{\pi}{2}$

b. S est une similitude directe d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ donc elle transforme l'axe $(O; \vec{u})$ en une droite perpendiculaire, E est un point de l'axe $(O; \vec{u})$ et S(E) = F donc l'image de l'axe $(O; \vec{u})$ est la droite perpendiculaire en F à l'axe $(O; \vec{u})$, or F est un point de l'axe $(O; \vec{v})$ donc l'image de l'axe $(O; \vec{u})$ est l'axe $(O; \vec{v})$.

c. N est un point de l'axe $(O; \vec{u})$ donc en notant N' son image par S, N' est un point de l'axe $(O; \vec{v})$ tel que AN' = $\dfrac{3}{2}$AN et $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AN'}) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$ donc le triangle ANN' est indirect et rectangle en A, donc N' est le point d'intersection de la perpendiculaire en A à (AN) et de l'axe $(O; \vec{v})$.

P est le point de l'axe $(O; \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A donc P est le point d'intersection de la perpendiculaire en A à (AN) et de l'axe $(O; \vec{v})$ donc N' = P.

d. Une similitude directe de centre A a une écriture complexe de la forme $z' - z_A = a\,(z - z_A)$

S(E) = F et S(A) = A donc $z_F - z_A = a\,(z - z_A)$ donc: $a = \dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = -\dfrac{3}{2}i$

$z' = -\dfrac{3}{2}i\,z + b$ or $z_A = -\dfrac{3}{2}i\ z_A + b$ donc $3 + 2i = -\dfrac{3}{2}i\,(3 + 2i) + b$ donc $b = 3 + 2i + \dfrac{3}{2}i\,(3 + 2i)$

$b = 3 + 2i + \dfrac{9}{2}i - 3 \Leftrightarrow b = \dfrac{13}{2}i$ donc $z' = -\dfrac{3}{2}i\,z + \dfrac{13}{2}i$.

2) *a*) N est un point de l'axe $(O; \vec{u})$ donc a pour affixe *x* et P est un point de l'axe $(O; \vec{v})$ donc a pour affixe *y* i.

S(N) = P donc $y\,i = -\dfrac{3}{2}i\,x + \dfrac{13}{2}i$ donc 2 *y* = – 3 *x* + 13 soit 3 *x* + 2 *y* = 13.

b) Soit l'équation (E) 3 *x* + 2 *y* = 13.

3 × 3 + 2 × 2 = 13 donc (E) a pour solution particulière (3 ; 2).

$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 3 \times 3 + 2 \times 2 = 13 \end{cases}$ donc par différence membre à membre : 3 (*x* – 3) + 2 (*y* – 2) = 0

3 (*x* – 3) = – 2(*y* – 2) donc 3 divise 2 (*y* – 2) or 3 et 2 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise *y* – 2

Il existe un entier relatif *k* tel que *y* – 2 = 3 *k*

En remplaçant dans 3 (*x* – 3) = – 2(*y* – 2) alors 3 (*x* – 3) = – 2 × 3 *k* donc *x* – 3 = – 2 *k*, d'où *x* = – 2 *k* + 3 et *y* = 3 *k* + 2 ($k \in \mathbb{Z}$).

Vérification : si *x* = – 2 *k* + 3 et *y* = 3 *k* + 2 ($k \in \mathbb{Z}$) alors 3 *x* + 2 *y* = 3 (– 2 *k* + 3) + 2 (3 *k* + 2)

3 *x* + 2 *y* = – 6 *k* + 9 + 6 *k* + 4 soit 3 *x* + 2 *y* = 13.

Les solutions de (E) sont *x* = – 2 *k* + 3 et *y* = 3 *k* + 2 ($k \in \mathbb{Z}$)

les points N et P dont les coordonnées sont des entiers sont les points N (– 2 *k* + 3 ; 0) et P (0 ; 3 *k* + 2)

Exercice 4 (3 points)

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10'3 près par défaut.

1) *a*) Montrer que p (X > 10) = 0,286.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_n la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_n en fonction de n.

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p, soit supérieure à 0.999 ?

CORRECTION

$p(\mathrm{X} \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$

$p(\mathrm{X} > t) = 1 - p(\mathrm{X} \leq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$

1. $p(\mathrm{X} > 10) = \mathrm{e}^{-10\lambda} = 0{,}286 \Leftrightarrow -10\lambda = \ln 0{,}286 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}286}{10} \approx 0{,}125$

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

$p(\mathrm{X} \leq 6) = 1 - \mathrm{e}^{-6\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}75} \approx 0{,}528$

3. *a*. L'événement « au moins un oscilloscope a une durée de vie supérieure à 10 ans » est l'événement contraire de « les 15 oscilloscopes ont une durée de vie inférieure à 10 ans »

La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 10 ans est 1 – 0,779 = 0,221

donc la probabilité de l'événement « les n oscilloscopes ont une durée de vie inférieure à 10 ans » est $0{,}221^n$

donc l'événement contraire a une probabilité : $p = 1 - 0{,}221^n$

3. *b*. On veut que $p \geq 0{,}999$ donc $1 - 0{,}221^n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 0{,}221^n \leq 1 - 0{,}999 \Leftrightarrow n \ln 0{,}221 \leq \ln 0{,}001 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}221}$

$\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}221} \approx 4{,}58$, donc $n \geq 5$.

Il faut donc acheter au moins 5 oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999.

Exercice 5 (6 points)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]\, 0\, ,+\infty\, [$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1) *a*) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, la courbe (L) de la fonction In et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C).
Vérifier que $M\,M_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2, $\dfrac{1}{e}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{e}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_k définie sur $]\, 0\, ,+\infty\, [$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$ égal à $\dfrac{1 + \ln k}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k\,(x\,,x^k)$ et $M\,(x\,,\ln x)$.
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\dfrac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit A(1, 0) et A_k le point de coordonnées $(u_k\,, f_k(u_k))$.
Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

CORRECTION

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]\, 0\, ,+\infty\, [$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1) *a*) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = +\infty$

$f_2(x) = x^2 - \ln x = x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$ or $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$

b) $\dfrac{f_2(x)}{x} = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$ donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe représentative de f_2 admet une branche parabolique en direction de l'axe des ordonnées.

c) $f'_2(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 1}{x} = \dfrac{(\sqrt{2}\,x + 1)(\sqrt{2}\,x - 1)}{x}$

$x > 0$ donc $f'_2(x)$ a le même signe que $\sqrt{2}\,x - 1$ d'où le tableau de variation de f_2.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'_2(x)$		$-$	0	$+$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

$$m = f_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$$

2) *a*) M est le point de coordonnées $(x\,;x^2)$ M_2 le point de coordonnées $(x\,;\ln x)$.
Graphiquement, $x^2 > \ln x$ donc $M\,M_2 = x^2 - \ln x = f_2(x)$.

b) Soit les points :

Axe des abscisses	courbe (C)	courbe (L)	courbe (Γ)
A d'abscisse $\dfrac{1}{e}$	M d'abscisse $\dfrac{1}{e}$	M' d'abscisse $\dfrac{1}{e}$	N d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MM'}$
B d'abscisse $\sqrt{\dfrac{1}{e}}$	M_1 d'abscisse $\sqrt{\dfrac{1}{e}}$	M'_1 d'abscisse $\sqrt{\dfrac{1}{e}}$	N d'abscisse $\sqrt{\dfrac{1}{e}}$ tel que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{M_1M'_1}$
C d'abscisse 2	M_2 d'abscisse 2	M'_2 d'abscisse 2	N d'abscisse 2 tel que $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{M_2M'_2}$

c) graphique à la fin

II] 1) *a*) $f'_k(x) = k\,x^{k-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{k\,x^k - 1}{x}$

b) $x > 0$ donc $f'_k(x)$ a le même signe que $k\,x^k - 1$.

sur $]\,0\,,+\infty\,[$, $k\,x^k - 1 = 0 \Leftrightarrow x^k = \dfrac{1}{k} \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$

La fonction $x \to x^k$ ($k \geq 2$) est strictement croissante sur $]\,0\,,+\infty\,[$ donc $k\,x^k - 1 > 0 \Leftrightarrow x^k > \dfrac{1}{k} \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$

donc sur $\left]0\,;\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\right[$, $f'_k(x) < 0$ et f_k est strictement décroissante sur $\left]0\,;\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\right[$

sur $\left[\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\,;+\infty\right[$, $f'_k(x) \geq 0$ et f_k est strictement croissante sur $\left[\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\,;+\infty\right[$

$f_k\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\right) = \dfrac{1}{k} - \ln\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\right) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1+\ln k}{k}$ donc f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$ égal à $\dfrac{1+\ln k}{k}$.

c) $k \geq 2$ donc $\dfrac{1+\ln k}{k} > 0$ (somme et quotient de termes positifs) donc pour tout $x > 0$, $f_k(x) > 0$ donc $x^k - \ln x > 0$ donc pour tout réel $x > 0$, la distance MM_k est égale à $f_k(x)$. La valeur minimale de la distance $M\,M_k$ est $\dfrac{1+\ln k}{k}$ obtenue pour $x = \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$.

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$.

a) $\ln u_k = \ln\left(\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}\right) = \dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{k}\right) = -\dfrac{\ln k}{k}$, or $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{k} = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln u_k = 0$

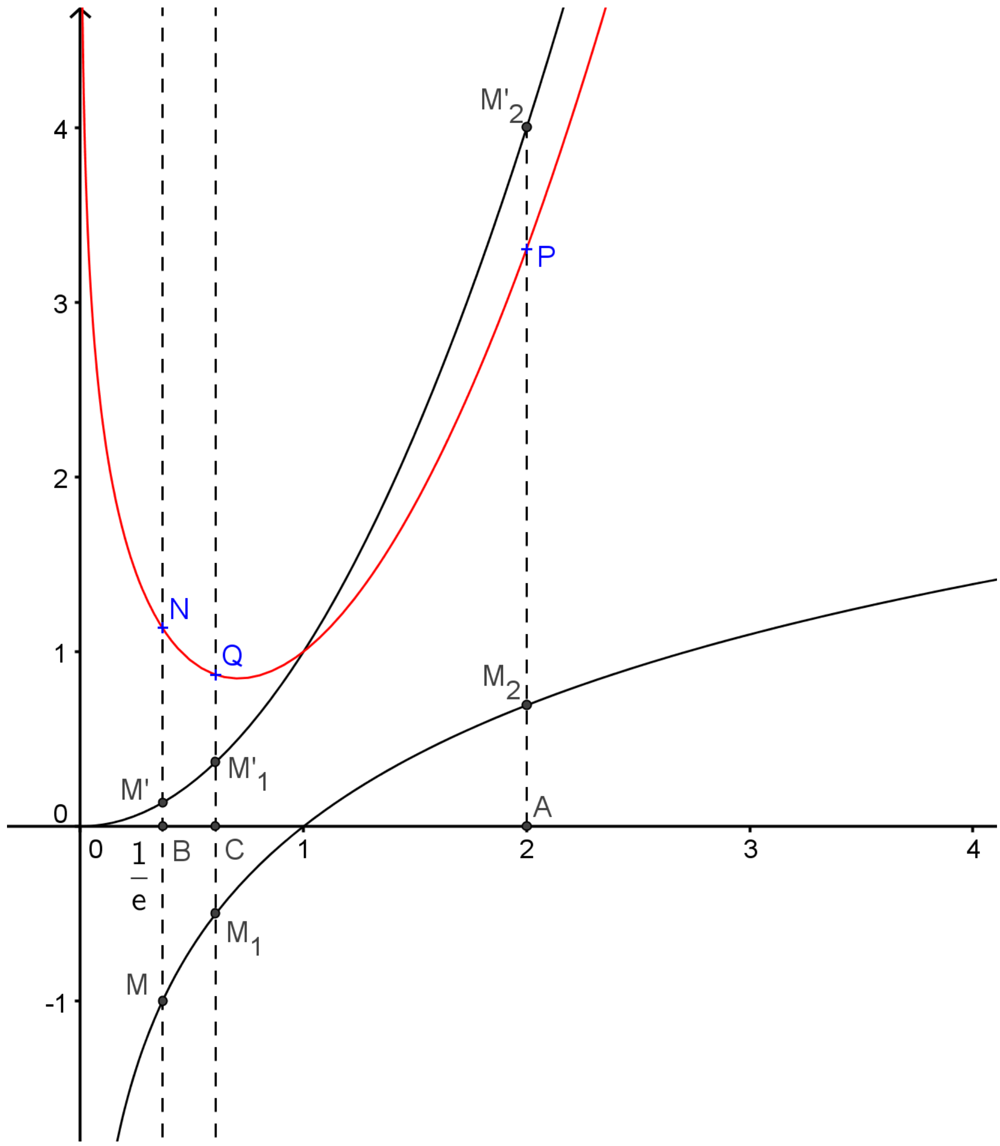
$u_k = e^{\ln u_k}$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = e^0 = 1$.

b) Soit A(1, 0) et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

$AA_k^{\,2} = (u_k - 1)^2 + (f_k(u_k))^2 = (u_k - 1)^2 + \left(\dfrac{1+\ln k}{k}\right)^2$

$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} (u_k - 1)^2 = 0$

$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln k}{k} = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1+\ln k}{k} = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} AA_k^{\,2} = 0$ soit $\lim\limits_{k\to+\infty} AA_k = 0$



4
3
2
1
0
-1
0
1
e
B
C
1
2
3
4
M'2
P
N
Q
M2
M'1
M'
A
M1
M