

REPUBLIQUE TUNISIENNE ♦ ♦ ♦ MINISTRE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 3 heures	Coefficient : 3
SECTION : Sciences Techniques		SESSION PRINCIPALE	

EXERCICE 1 : (3 points)

- 1) c 2) a 3) a 4) c

EXERCICE 2 : (6 points)

1) a) $\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires et par suite A, B et C non alignés don ils déterminent un plan P.

b) A(2 , 1 , 1) et $2 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$ donc les coordonnées de A vérifient l'équation $x - y - z = 0$

B(1 , 1 , 0) et $1 - 1 - 0 = 0$ donc les coordonnées de B vérifient l'équation $x - y - z = 0$

C(1 , 0 , 1) et $1 - 0 - 1 = 0$ donc les coordonnées de C vérifient l'équation $x - y - z = 0$

Ainsi $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan P.

2) a) D(2 , 0 , 0). $2 - 0 - 0 = 2 \neq 0$ donc D n'appartient pas au plan P donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Autrement : $\det(\overline{AB} ; \overline{AC} ; \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

b) \mathcal{V} : le volume du tétraèdre ABCD. $\mathcal{V} = \frac{1}{6} |\det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$

3) a) I $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La sphère (S) de rayon $R = ID = \sqrt{(2 - \frac{3}{2})^2 + (0 - \frac{1}{2})^2 + (0 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$IA = \sqrt{(2 - \frac{3}{2})^2 + (1 - \frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = R$ donc (S) passe par A.

$IB = \sqrt{(1 - \frac{3}{2})^2 + (1 - \frac{1}{2})^2 + (0 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = R$ donc (S) passe par B

b) $\{A, B\} \in (S) \cap P$ et comme $A \neq B$ donc P coupe (S) suivant un cercle (\mathcal{C}).

c) $\{A, B\} \in (S) \cap P$ donc $\{A, B\} \in (\mathcal{C})$ et comme $IC = \sqrt{(1 - \frac{3}{2})^2 + (0 - \frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = R$ donc (S) passe par C, d'où $\{A, B, C\} \in (\mathcal{C})$ ainsi (\mathcal{C}) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4) a) Δ passe par I $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et perpendiculaire au plan P donc le normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ au plan P est un vecteur

$$\text{directeur de } \Delta : \Delta : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + m \\ y = \frac{1}{2} - m \\ z = \frac{1}{2} - m \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

b) Ω est le projeté orthogonal de I sur P donc $\Omega \in \Delta$, par suite $\Omega \left(\frac{3}{2} + m, \frac{1}{2} - m, \frac{1}{2} - m \right)$ et $\Omega \in P$

On remplace les coordonnées de Ω dans l'équation cartésienne de P on obtient

$$\frac{3}{2} + m - \frac{1}{2} - m - \frac{1}{2} - m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$$

Ainsi $\Omega \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$

c) On vérifie que D est un point de Δ et comme passe par Ω est perpendiculaire au plan P donc $D\Omega$ est la

hauteur de ABCD issue de D ainsi $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times D\Omega$

$D' = S_{\Omega}(D)$ donc $D' \in \Delta$ et $D\Omega = D'\Omega$ ainsi $D'\Omega$ est la hauteur de ABCD' issue de D' ainsi

$$V' = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times D'\Omega = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times D\Omega = V$$

Autrement : $D' = S_{\Omega}(D) \Leftrightarrow \Omega$ est le milieu de $[DD']$ donc

$$\begin{cases} \frac{4}{3} = \frac{1}{2}(2 + x_{D'}) \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{2}y_{D'} \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{2}z_{D'} \end{cases} \quad \text{d'où } D' \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$V' = \frac{1}{6} \det(\overline{AB}; \overline{AC}; \overline{AD'}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{3} = V$$

EXERCICE 3 : (5 points)

1) a) $f(x) = 2 - x + \ln x$

f est continue sur $[1, +\infty[$ et $f(x) \in]-\infty, 1]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $] -\infty, 1[$ et comme est strictement croissante donc cette solution est unique.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \alpha - 2$$

b) $f(\alpha) = 0$ d'après le tableau de variation de f on a

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \in]1, \alpha[$$

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \in]\alpha, +\infty[$$

2) soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \end{cases}; n \in \mathbb{N}$

a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n; 1 \leq u_n \leq \alpha$

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq \alpha$ donc vrai pour $n = 0$

Supposons que pour $n > 0, 1 \leq u_n \leq \alpha$ et démontrons que $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

$$1 \leq u_n \leq \alpha \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln u_n \leq \ln \alpha \\ \Leftrightarrow 2 \leq 2 + \ln u_n \leq 2 + \ln \alpha$$

Or $\ln \alpha = \alpha - 2$ d'où $2 \leq 2 + \ln u_n \leq 2 + \ln \alpha \Leftrightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq \alpha$ donc vrai pour $n+1$

D'où pour tout entier naturel $n; 1 \leq u_n \leq \alpha$

b) $u_{n+1} - u_n = 2 + \ln u_n - u_n = f(u_n)$ or $1 \leq u_n \leq \alpha$ donc $f(u_n) \geq 0$ d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers $\ell \in [1, \alpha]$ et comme $u_{n+1} = g(u_n)$

avec $g: x \mapsto 2 + \ln x, g$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc g est continue en ℓ d'où ℓ est la solution de l'équation

$$g(x) = x \Leftrightarrow 2 + \ln x = x \Leftrightarrow 2 - x + \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ainsi } \ell = \alpha$$

EXERCICE 4 : (6 points)

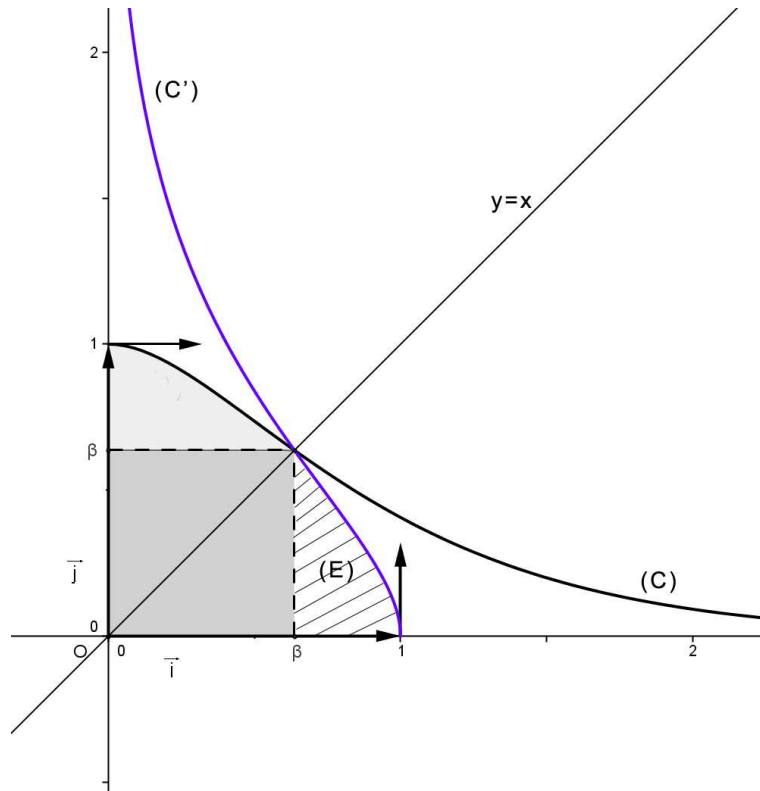
1) a) $f(0) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (l'axe des abscisses est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$)

$f'_d(0) = 0$ (demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0).

b) f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$

$$\text{sur } J = f([0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f, f(0) \right] =]0, 1].$$

2)



3) a) f est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{-2x}$, a et b deux réels.

D'après 1) a) on a :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'_d(0) = 0 \end{cases}$$

Or f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'(x) = ae^{-2x} - 2(ax + b)e^{-2x} = (-2ax + a - 2b)e^{-2x}$

Donc
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'_d(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

D'où pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$

b) $I = \int_0^\beta (2x + 1)e^{-2x} dx$

on pose
$$\begin{cases} u(x) = 2x + 1 \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

D'après le formule d'intégration par parties :
$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{2}(2x + 1)e^{-2x} \right]_0^\beta + \int_0^\beta e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}(2x + 1)e^{-2x} \right]_0^\beta + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^\beta \\ &= \left(-\frac{1}{2}(2\beta + 1)e^{-2\beta} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2}e^{-2\beta} + \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2}(2\beta + 1)e^{-2\beta} - \frac{1}{2}e^{-2\beta} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(2\beta + 1)e^{-2\beta} - \frac{1}{2}e^{-2\beta} = 1 - \frac{1}{2}(2\beta + 2)e^{-2\beta} = 1 - (\beta + 1)e^{-2\beta} \end{aligned}$$

c)
$$\mathcal{A} = \int_\beta^1 f^{-1}(x) dx = \int_0^\beta f(x) dx - \beta^2 = \int_0^\beta (2x + 1)e^{-2x} dx - \beta^2 = 1 - \beta^2 - (\beta + 1)e^{-2\beta} \text{ u.a}$$

Autrement :
$$\mathcal{A} = \int_\beta^1 f^{-1}(x) dx = \int_0^\beta (f(x) - \beta) dx = 1 - (\beta + 1)e^{-2\beta} - \beta^2 \text{ u.a}$$