REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 3 heures	Coefficient : 3
SECTION : Sciences Techniques		SESSION DE CONTROLE	

EXERCICE 1 : (3 points)

1) a) Vrai **b)** Vrai

2) a) Faux **b)** Vrai

EXERCICE 2 : (6 points)

$\theta \in [0\ ,\ 2\pi[$

1) $z^2 - (4+e^{i\theta})z + 2\left(2+e^{i\theta}\right) = 0$

$\Delta = \left(4+e^{i\theta}\right)^2 - 4\times 2\left(2+e^{i\theta}\right) = 16 + 8e^{i\theta} + e^{i2\theta} - 16 - 8e^{i\theta} = e^{i2\theta}$. donc $\delta = e^{i\theta}$

D'où les solutions sont $z_1 = \dfrac{4+e^{i\theta}-e^{i\theta}}{2} = 2$ et $z_2 = \dfrac{4+e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2} = 2+e^{i\theta}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2\ ,\ 2+e^{i\theta}\right\}$

2) $z_I = 2$ et $z_M = 2+e^{i\theta}$.

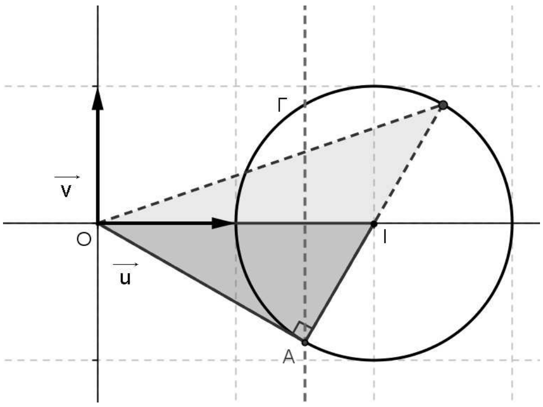
$\left|z_M - z_I\right| = \left|2+e^{i\theta}-2\right| = \left|e^{i\theta}\right| = 1 \Leftrightarrow IM = 1$ d'où M appartient au cercle (Γ) de centre I et de rayon 1.

3) a) $z_A = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$IA = \left|z_A - z_I\right| = \left|\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2\right| = \left|-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ ainsi A est un point de (Γ).

Autrement : $z_A = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + e^{i\frac{4\pi}{3}}$ z_A est de la forme $z_M = 2+e^{i\theta}$ avec $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$

Ainsi M est un point de (Γ).



b) $\dfrac{z_{\overrightarrow{AI}}}{z_{\overrightarrow{AO}}} = \dfrac{-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\dfrac{i}{\sqrt{3}}\left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\right)}{-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{i}{\sqrt{3}}$ d'où $\dfrac{z_{\overrightarrow{AI}}}{z_{\overrightarrow{AO}}}$ est imaginaire pur donc $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AO}$ ainsi le triangle OAI est rectangle en A.

c) OAM est rectangle en A donc (AM) ⊥ (AO) et comme (AI) ⊥ (AO) donc (AM) // (AO) et par suite M∈ (AO) et comme M ∈ (Γ) d'où M est le point diamétralement opposé à A sur (Γ).

Ainsi $\dfrac{z_A + z_M}{2} = z_I \Leftrightarrow z_M + z_A - 2z_I = 0 \Leftrightarrow 2 + e^{i\theta} + \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta + i\ \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta + i\ \sin\theta = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\theta \in [0\ ,\ 2\pi[$ D'où $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

EXERCICE 3 : (5 points)

1) soit g la fonction définie sur $]0\ ,\ +\infty[$ par $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x} + \ln x$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} + \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} + \ln x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{x} + \ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$ la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction celle de $(O\ ,\ \vec{i})$.

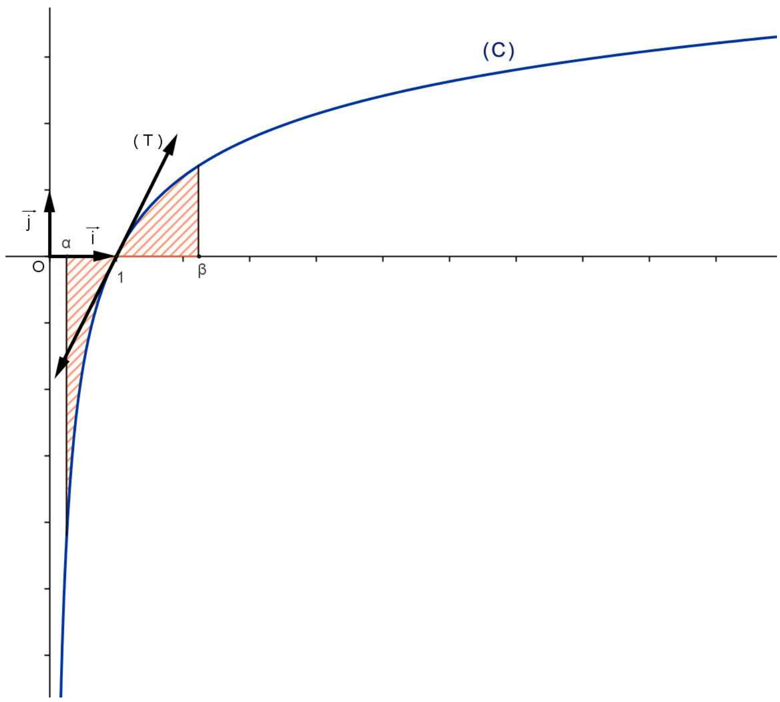
c) la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur IR* ainsi la fonction g est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$. Pour tout $x \in]0\ ,\ +\infty[$; $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+x}{x^2}$

d) Pour tout $x \in]0\ ,\ +\infty[$; $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+x}{x^2}$ donc $g'(x) > 0$ et par suite g est strictement croissante sur $]0\ ,\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
g' (x)		+	
g (x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) $(T): y = g'(1)(x-1) + g(1)$ d'où $(T): y = 2x - 2$

b)



3) soit f la fonction définie sur $]0\,,\,+\infty[$ par $f(x)=-1+(x-1)\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) f est continue est strictement décroissante sur $]0\,,\,1[$ et $f(]0\,,\,1[)=]-1\,,\,+\infty[$, $0\in]-1\,,\,+\infty[$ ainsi l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α sur $]0\,,\,1[$.

De même f est continue est strictement décroissante sur $]1\,,\,+\infty[$ et $f(]1\,,\,+\infty[)=]-1\,,\,+\infty[$, $0\in]-1\,,\,+\infty[$ ainsi l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution β sur $]1\,,\,+\infty[$.

b) $f(0,2)=0,29$ et $f(0,3)=-0,16$ ainsi $f(0,2)\times f(0,3)<0$ donc $0,2<\alpha<0,3$

$f(2,2)=-0,05$ et $f(2,3)=0,08$ ainsi $f(2,2)\times f(2,3)<0$ donc $2,2<\beta<2,3$

4) a) voir figure ci-dessus.

b) f est dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$. Pour tout $x\in]0\,,\,+\infty[$; $f'(x)=\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}=1-\dfrac{1}{x}+\ln x=g(x)$

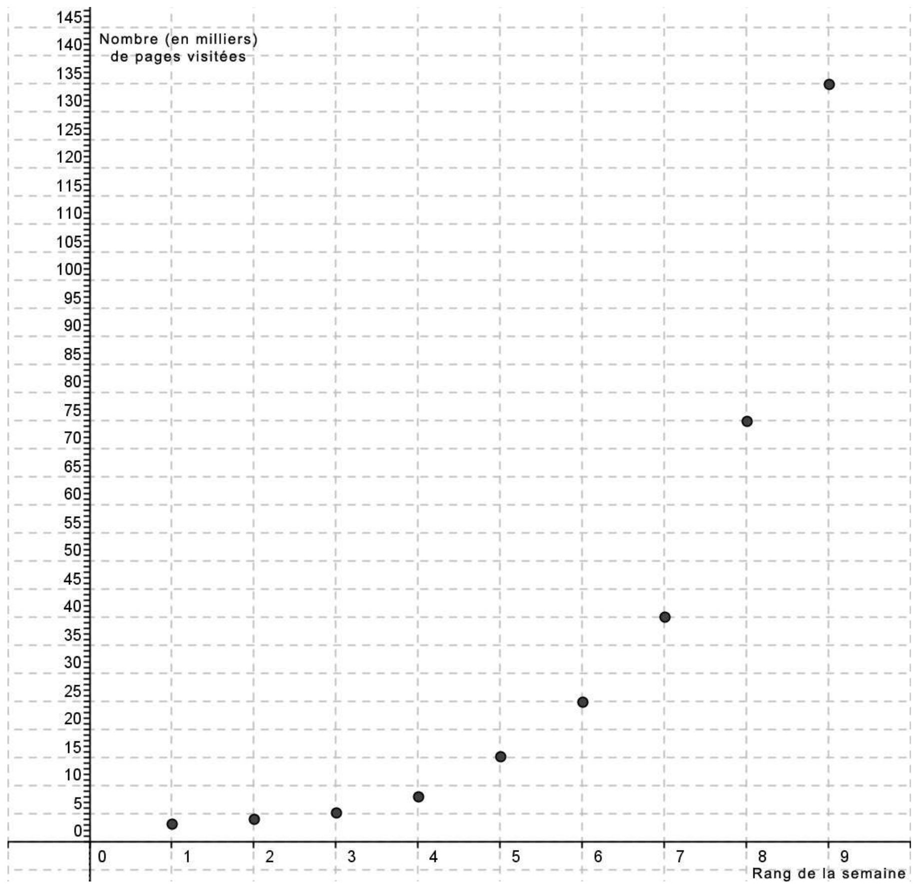
c) $\mathscr{A}=\displaystyle\int_\alpha^\beta |g(x)|\,dx=\int_\alpha^1 |g(x)|\,dx+\int_1^\beta |g(x)|\,dx=\int_\alpha^1 -g(x)\,dx+\int_1^\beta g(x)\,dx=\int_1^\alpha g(x)\,dx+\int_1^\beta g(x)\,dx$

d) $\mathscr{A}=\displaystyle\int_\alpha^\beta |g(x)|\,dx=\int_1^\alpha g(x)\,dx+\int_1^\beta g(x)\,dx=\int_1^\alpha f'(x)\,dx+\int_1^\beta f'(x)\,dx=[f(x)]_1^\alpha+[f(x)]_1^\beta$

$=f(\alpha)-f(1)+f(\beta)-f(1)=-2f(1)=2$ u.a

EXERCICE 4 : (5 points)

1)



2) a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	1,1	1,39	1,61	2,08	2,71	3,22	3,69	4,32	4,91

b) $r = 0,99$

c) $\Delta : z = 0,49x + 0,34$

d) $z = 0,49x + 0,34 \Leftrightarrow \ln y = 0,49x + 0,34 \Leftrightarrow y = e^{0,49x+0,34}$ ainsi $y = e^{0,49x}e^{0,34}$

D'où $y = 1,4e^{0,49x}$

e) pour $x = 12$ on a $y = 1,4e^{0,49\times12} = 500,93$

D'où le nombre des pages visitées durant la douzième semaine est 501.