REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 2 heures	Coefficient : 2
SECTION : Economie et Gestion		SESSION PRINCIPALE	

EXERCICE 1 : (4 points)

1) **Vrai** 2) **Vrai** 3) **Faux** 4) **Vrai** 5) **Vrai** 6) **Faux** 7) **Faux** 8) **Vrai**

EXERCICE 2 : (5,5 points)

1) a) $\begin{cases} U_0 = 40 \\ U_{n+1} = 0{,}75\ U_n + 30 \quad ; \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

Par récurrence

Pour n = 0 , $U_0 = 40 \le 120$ donc vraie

Supposons que pour $n \in IN$, $U_n \le 120$ et montrons que , $U_{n+1} \le 120$

On a $U_n \le 120 \Leftrightarrow 0{,}75U_n \le 120 \times 0{,}75 \Leftrightarrow 0{,}75U_n + 30 \le 90 + 30$ ainsi $U_{n+1} \le 120$

D'où pour tout $n \in IN$, $U_n \le 120$

b) $U_{n+1} - U_n = 0{,}75\ U_n + 30 - U_n = 30 - 0{,}25U_n$ or $U_n \le 120$ donc $0.25U_n \le 30$ d'où $30 - 0{,}25U_n \ge 0$ et par suite (Un) est croissante.

c) (Un) est croissante et majorée donc elle est convergente vers une limite ℓ avec $\ell = 0{,}75\ \ell + 30 \Leftrightarrow 0{,}25\ell = 30$ D'où $\ell = 120$

2) a) $V_n = U_n - 120$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 120}{U_n - 120} = \frac{0{,}75\ U_n + 30 - 120}{U_n - 120} = \frac{0{,}75\ U_n - 90}{U_n - 120} = \frac{0{,}75(U_n - 120)}{U_n - 120} = 0{,}75$$

Ainsi (Vn) est une suite géométrique de raison q = 0,75 et de premier terme $V_0 = U_0 - 120 = 40 - 120 = -80$

b) $V_n = V_0 q^n = -80 \times (0{,}75)^n$

c) $V_n = U_n - 120 \Leftrightarrow U_n = 120 + V_n = 120 - 80 \times (0{,}75)^n$ d'où $U_n = 120 - 80 \times (0{,}75)^n$

3) le nombre d'abonnés en 2011 est $40 = U_0$

Soit Un le nombre d'abonnés à l'année n et Un+1 dans l'année (n+1) donc $U_{n+1} = 0{,}75\ U_n + 30$ (la suite de 1))

Donc d'après 2) c) $U_n = 120 - 80 \times (0{,}75)^n$

$$120 - 80 \times (0{,}75)^n > 100 \Leftrightarrow -80 \times (0{,}75)^n > -20 \Leftrightarrow (0{,}75)^n < 0{,}25 \Leftrightarrow n\ \ln(0{,}75) < \ln(0{,}25)$$

D'où $n > \dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}75)}$ or $\dfrac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}75)} \approx 4{,}82$ donc après 5 ans.

EXERCICE 3 : (5 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix}$

1) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2-2a \\ 0 & 8+3a \end{pmatrix} = 11I_2$

Donc $\begin{pmatrix} 11 & 2-2a \\ 0 & 8+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$ et par suite $\begin{cases} 2-2a = 0 \\ 8+3a = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 3a = 3 \end{cases}$ d'où $a = 1$

2) a) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \times X = M$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) $\det A = 3 - 8 = -5 \ne 0$ donc A est inversible et d'après 1) pour a =1 $A \times B = 11I_2$ donc $A^{-1} = \dfrac{1}{11}B$

$A \times X = M \Leftrightarrow X = A^{-1} \times M = \dfrac{1}{11}B \times M$ D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$S_{IR^2} = \{(1\,,\,3)\}$

3) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x - y \\ 2x - y + 6 - x - y = 1 \\ 3x + 2y - (6 - x - y) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x - y \\ x - 2y = 1 - 6 \\ 3x + 2y - 6 + x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x - y \\ x - 2y = -5 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

4) $(S'')\begin{cases} z = 6 - x - y \\ x - 2y = -5 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x - y \\ (S) \end{cases}$ or d'après 2) les solutions de (S) sont $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

Donc $(S'') \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - x - y \\ x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 6 - 1 - 3 \\ x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ d'où $S_{IR^3} = \{(1\,,\,3\,,\,2)\}$

EXERCICE 4 : (5 ,5 points)

1)

	Atelier A_1	Atelier A_2	Total
Nombre de pièces défectueuses	50	$200 - 50 = 150$	200
Nombre de pièces non défectueuses	$8000 - 50 = 7950$	$12000 - 150 = 11850$	$20000 - 200 = 19800$
Total	$20000 - 12000 = 8000$	$\frac{60}{100} \times 20000 = 12000$	20000

2) A : « la pièce prélevée provient de l'atelier A_1 »
D : « la pièce prélevée est défectueuse »

a) $p(D) = p(D \cap A) + p(D \cap \overline{A}) = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} = \frac{4}{150} = \frac{2}{75} \approx 0{,}0267$

b) $p(D/A) = \frac{p(D \cap A)}{p(A)} = \frac{50}{8000} = \frac{1}{160} = 0{,}00625$

c) $p(D/\overline{A}) = \frac{p(D \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \frac{150}{12000} = \frac{1}{80}$

d) $p(\overline{A}/D) = \frac{p(D \cap \overline{A})}{p(D)} = \frac{\frac{150}{12000}}{\frac{2}{75}} = \frac{150}{12000} \times \frac{75}{2} = \frac{11250}{24000} = 0{,}46875$

3) Pour une pièce il y a deux issues contraires soit elle est défectueuse de probabilité $p(D) = \frac{2}{75}$ ou non défectueuse de probabilité $p(\overline{D}) = 1 - \frac{2}{75} = \frac{73}{75}$.

Le client achète un lot de 10 pièces. Soit p la probabilité que le lot ne contienne aucune pièce défectueuse.

$p = \left(p(\overline{D})\right)^{10} = \left(\frac{73}{75}\right)^{10}$