Lycée Hamouda Pacha la Manouba

Devoir de synthèse # 3

Année scolaire 2011-2012

Quatrième maths$_2$

Durée 4 heures

Pr : Ben fredj sofiane

Le sujet comporte 3 pages numérotée de 1 à 3

Exercice 1. (3 points) **QCM** Voir feuille annexe (Page 3).

Exercice 2. (3 points) L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les points :

$$A(1,0,2), B(0,0,1), C(0,-1,3) \text{ et } E(0,2,3)$$

1– (a) Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$

(b) Vérifier que $x - 2y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

(c) Calculer le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre $ABCE$

2– Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{1}{3}$.

(a) Montrer que le plan P' d'équation $x - 2y - z + 5 = 0$ est l'image du plan (ABC) par h.

(b) Déterminer la distance du point E au plan P' puis déduire l'aire du triangle $A'B'C'$ où A', B' et C' sont les images respectives de A, B et C par h.

Exercice 3. (4 points) Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeau sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt, on note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètre que l'autocar va parcourir jusqu'a ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{\ln 2}{50}$.

On donnera les résultats sous forme exacte

1– Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

(a) comprise entre 50 et 100 km;

(b) supérieure à 300 km.

2– Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres?

3– L'entreprise possède 24 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepot et le lieu ou survient un incident sont des variables aléatoires deux deux indépendantes et de mémé loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{\ln 2}{50}$. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru 100 kilomètres.

(a) Donner la loi de probabilité de X.

(b) Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru 100 kilomètres.

EXERCICE 4. (4 points) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (On choisira 2 cm comme unité graphique.)

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que : $3(x+1)^2 + 4y^2 = 12$.

1– (a) Montrer que $\mathscr{E}$ est une ellipse que l'on précisera le centre et les sommets.

(b) Construire $\mathscr{E}$.

(c) Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de $\mathscr{E}$.

2– Soit M un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x, y) tel que la mesure principale θ de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ appartient à l'intervalle $[0, \pi]$.

(a) Démontrer que $OM = \dfrac{1}{2}(3 - x)$.

(b) Montrer que $OM = \dfrac{3}{2 + \cos\theta}$

(c) La droite (OM) recoupe $\mathscr{E}$ en M'.

Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de la distance MM'.

EXERCICE 5. (6 points) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1– (a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

(b) Étudier les variations de f.

(c) Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} définie et continue sur un intervalle que l'on précisera.

(d) Tracer (C) et (C') où (C') est la courbe représentative de f^{-1} (On pourra préciser en particulier la demi tangente à (C') à l'origine).

2– X étant un réel tel que $0 < X \leq 1$.

(a) Calculer l'intégrale $G(X) = \displaystyle\int_X^1 t f'(t)\,dt$.

On pourra chercher une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $t \longmapsto t f'(t)$.

(b) On pose $F(X) = \displaystyle\int_X^1 f(t)\,dt$. Exprimer $F(X) + G(X)$ à l'aide de X.

(c) Déduire l'expression de $F(X)$ à l'aide de X.

3– Calculer l'aire de la parie limitée par (C) et (C') et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

4– n étant un entier naturel tel que $n \geq 2$.

(a) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une solution unique α_n dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que la suite (α_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

(c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n \ln(n) = 1$.

FEUILLE ANNEXE

À RENDRE AVEC LA COPIE

Nom :..................

Prénom :.................

Pour chaque question, une seule réponse est exacte, les trois parties 1, 2 et 3 sont indépendantes. Cocher la bonne réponse, aucune justification n'est demandée.

1– Une étude sur la durée du service à la caisse d'un marché d'alimentation a donné les résultats ci-contre.

t	120	240	360	420
p	$0,3$	$0,5$	$0,66$	$0,75$

p est la proportion de clients servis en une durée inférieure à t (en secondes).

(a) La covariance du sérine statistique (t, p) vérifie :

(a)☐ $\mathbf{cov}(t, p) = 0$

(b)☐ $\mathbf{cov}(t, p) > 0$

(c)☐ $\mathbf{cov}(t, p) < 0$

(b) On pose $f = -\ln(1-p)$. Une équation cartésienne de la droite de régression de f en t est :

(a)☐ $f = 0.076 - 0.0035t$

(b)☐ $f = -0.076t + 0.0035$

(c)☐ $f = -0.076 + 0.0035t$

2– La solution de l'équation différentielle $y' + y\ln 2 = \ln 2$ avec $y(0) = 2$ est la fonction :

(a)☐ $y_1 : x \mapsto 1 - 2^{-x}$

(b)☐ $y_2 : x \mapsto 1 + 2^{x}$

(c)☐ $y_3 : x \mapsto 1 + 2^{-x}$

3– Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+x^2}{x-1}\right)$ est :

(a)☐ $]0, +\infty[$

(b)☐ $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

(c)☐ $[-1, 0[\cup]1, +\infty[$

CORRIGÉ DU DEVOIR DE SYNTHÈSE # 3

ANNÉE SCOLAIRE 2011-2012

QUATRIÈME MATHS

SOLUTION 1. .

1– (a) **Réponse (b)**

(b) **Réponse (c)**

2– **Réponse (c)**

3– **Réponse (b)**

SOLUTION 2. .

1– (a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et par la suite $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

d'autre part $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

(b) Les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient l'équation $x-2y-z+1=0$.

(c) Le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre $ABCE$ en unité de volume est égal à :

$$\mathscr{V}=\frac{|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AE}|}{6}=\frac{AE^2}{6}=1$$

2– Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{1}{3}$.

(a) L'image d'un plan par une homothétie est un plan qui lui est parallèle, alors P' est d'équation :$x-2y-z+d=0$

On note $B'=h(B)$ alors : $\begin{cases} x_{B'}=\frac{1}{3}(x_B-x_E)+x_E=0\\ y_{B'}=\frac{1}{3}(y_B-y_E)+y_E=\frac{4}{3}\\ z_{B'}=\frac{1}{3}(z_B-z_E)+z_E=\frac{7}{3}\end{cases}$

Comme $B'\in P'$ alors : $0-2\times\dfrac{4}{3}-\dfrac{7}{3}+k=0$ donc $k=5$.

(b) La distance de E à P' notée d, on a : $d=\dfrac{|0-2\times2-3+5|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

On note $\mathscr{V}'$ le volume du tétraèdre $EA'B'C'$ alors $\mathscr{V}'=\dfrac{\mathscr{V}}{27}=\dfrac{1}{27}$

D'autre part $\mathscr{V}'=\dfrac{d\times\mathscr{A}}{3}$ où $\mathscr{A}$ est l'aire du triangle $A'B'C'$ donc : $\mathscr{A}=\dfrac{\sqrt{6}}{18}$.

SOLUTION 3. .

1− (a) $p(50 \leq D \leq 100) = e^{-50\lambda} - e^{-100\lambda} = e^{-50\times\frac{\ln 2}{50}} - e^{-100\times\frac{\ln 2}{50}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(b) $p(D \geq 300) = e^{-300\times\frac{\ln 2}{50}} = \frac{1}{64}$

2− On note les événements :

A : l'autocar a déjà parcours 350 km sans incident, soit $A : D \geq 350$;

B : l'autocar ne subit aucun incident au cours des 25 km prochains, soit $B : D \leq 375$.

On remarque $B \subset A$, la probabilité cherchée est :

$$p(B|A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{p(B)}{p(A)} = \frac{e^{-375\lambda}}{e^{-350\lambda}} = e^{-25\lambda} = e^{-\frac{\ln 2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3− (a) X suit une loi binomiale de paramètre $n = 24$ et $p = p(D \geq 100) = e^{-100\lambda} = e^{-100\frac{\ln 2}{50}} = \frac{1}{4}$.

La loi de X est donnée par :

k un entier de l'intervalle $[0, 24]$ et $p(X = k) = C_{24}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{24-k}$

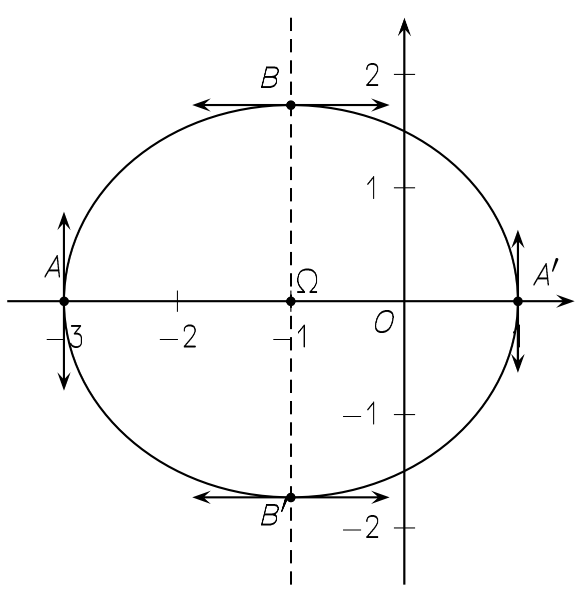
(b) Le nombre moyen cherché est $E(X) = 24 \times \frac{1}{4} = 6$.

SOLUTION 4. .

1− (a) $M(x, y) \in \mathscr{E}$ équivaut $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ donc $\mathscr{E}$ est une ellipse de centre $\Omega(-1, 0)$, d'axe focal la droite des abscisses puisque $a = 2 > b = \sqrt{3}$ et de sommets :

* principaux $A(-1, 0)$ et $A'(-3, 0)$;
* secondaires $B(-1, \sqrt{3})$ et $B'(-1, -\sqrt{3})$

(b) L'allure de $\mathscr{E}$.



(c) On pose : $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-3}=1$.

- Les foyers de $\mathscr{E}$ sont les points de coordonnées $(0,0)$ et $(-2,0)$
- La directrice associée au foyer $(0,0)$ est d'équation $x=\dfrac{a^2}{c}-1=3$;
- La directrice associée au foyer $(-2,0)$ est d'équation $x=-\dfrac{a^2}{c}-1=-5$;
- d'excentricité $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

2– (a) On a : $OM=\sqrt{x^2+y^2}$ et comme $M(x,y)\in\mathscr{E}$ alors $y^2=3-\dfrac{3}{4}(x+1)^2$.

$OM^2=x^2+y^2=x^2+3-\dfrac{3}{4}(x+1)^2=\dfrac{(3-x)^2}{4}$

D'autre part $x\in[-3,1]$ donc $3-x>0$ et par la suite $OM=\dfrac{3-x}{2}$

(b) $M\in\mathscr{E}$ alors $x=OM\times\cos\theta$ d'où $OM=\dfrac{3-OM\cos\theta}{2}$ ... donc $OM=\dfrac{3}{2+\cos\theta}$

(c) Soit θ' la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OM'})$ et comme O appartient au segment $[MM']$, alors $\theta'=\pi-\theta$ et comme $M'\in\mathscr{E}$ alors $OM'=\dfrac{3}{2+\cos\theta'}=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$.

D'autre part $MM'=OM+OM'=\dfrac{3}{2+\cos\theta}+\dfrac{3}{2-\cos\theta}=\dfrac{12}{4-\cos^2\theta}$.

MM' est maximale (respectivement minimale) si et seulement si $4-\cos^2\theta$ est minimale (respectivement maximale).

La dérivée de $x\mapsto 4-\cos^2\theta$ est $x\mapsto 2\cos x\sin x$ d'où :

$4-\cos^2\theta$ max en $\dfrac{\pi}{2}$ d'où MM' min en $\dfrac{\pi}{2}$ donc $MM'_{min}=\dfrac{12}{4-\cos^2\frac{\pi}{2}}=3$.

$4-\cos^2\theta$ min en 0 ou π d'où MM' max en 0 ou π donc $MM'_{max}=\dfrac{12}{4-\cos^2 0}=4$.

SOLUTION 5. .

1– (a) Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

En posant $X=-\frac{1}{x}$ alors , si x tend vers 0^+ alors X tend vers $-\infty$ d'où :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{X\to-\infty}X^2e^X-Xe^X=0$$

.

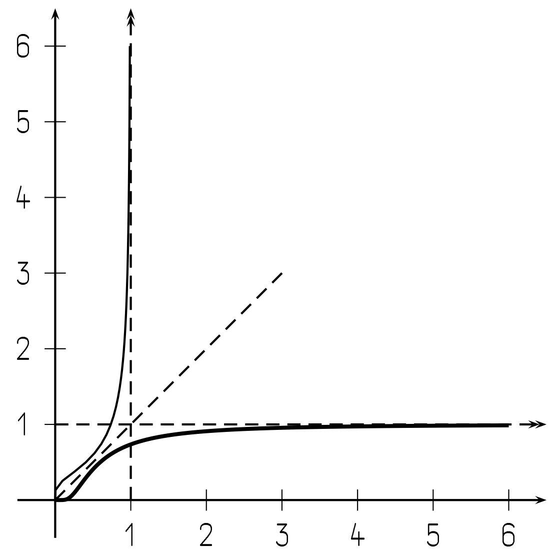
f est dérivable à droite en 0 et (C) admet une demi tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 0.

(b)
- Branches infinies : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=1\times 1=1$, la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
- Pour tout rée $x>0$, $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'=...=\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$
- Pour tout réel $x>0$, $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

(c) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ alors elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur l'intervalle $f([0,+\infty[)=[0,1[$.

(d) Courbe (C) et (C').

La courbe (C') admet une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées à l'origine.



2– X étant un réel de l'intervalle $]0,1]$, les fonctions $t \mapsto tf'(t)$ et $t \mapsto f(t)$ sont continues sur tous intervalle inclus dans $]0,+\infty[$.

(a) $G(X) = \int_X^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \int_X^1 \left(-\frac{1}{t}\right)' e^{-\frac{1}{t}} = \left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_X^1 = e^{-1} - e^{-\frac{1}{x}}$ (1).

(b) $F(X) + G(X) = \int_X^1 \Big(f(t) + tf'(t)\Big) dt = \int_X^1 \Big(tf(t)\Big)' dt = \Big[tf(t)\Big]_X^1 = f(1) - Xf(X)$ (2)

(c) (1) et (2) donnent : $F(X) = e^{-1} - Xe^{-\frac{1}{X}}$

3– En unité d'aire, l'aire demandée est :

$A = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt$ l'aire du carré de coté 1 moins deux fois l'aire du domaine limité par (C) et les droites d'équations $x = 0, y = 0$ et $x = 1$.

d'autre part $\int_0^1 f(t)dt = \lim\limits_{X \to 0^+} F(X) = \lim\limits_{X \to 0^+} e^{-1} - Xe^{-\frac{1}{X}}$ donc $A = 1 - 2e^{-1}$.

4– (a) f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$ et comme pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n}$ appartient à $]0,1[$ alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unie α_n dans $]0,+\infty[$ et on a : $\alpha_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(b) pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\alpha_{n+1} - \alpha_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

Comme f^{-1} est croissante sur $[0,1[$ et comme $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ alors $\alpha_{n+1} - \alpha_n < 0$ et par la suite (α_n) est décroissante.

(α_n) est décroissante et minorée par 0 alors elle converge.

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0$ puisque f^{-1} est continue à droite en 0.

(d) Soit n un entier tel que $n \geq 2$, comme $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ alors $\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)e^{-\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{1}{n}$ d'où :

$$\alpha_n \ln n = 1 - \alpha_n \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) = 1 - \alpha_n \ln(1 + \alpha_n) + \alpha_n \ln(\alpha_n)$$

Comme α_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n \ln(n) = 1$.