LYCÉE HAMMOUDA P.

DEVOIR DE SYNTHÈSE # 2.

ANNÉE SCOLAIRE 2011–2012

Pr : Ben fredj sofiane

Le devoir dure 4 heures. Les calculatrices sont autorisées, mais : l'échange de tout matériel est interdit
Les brouillons ne sont pas acceptés dans les copies. Une copie non soignée sera sanctionnée.

EXERCICE 1 (4 points). .

1– On considère l'équation $(E) : 4x - 5y = 1$. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E), en remarquant que $(-1, -1)$ est une solution particulière de (E).

2– On pose $a = 4n + 3$ et $b = 3n + 1$ où n est un entier naturel et soit $d = a \wedge b$

(a) Déterminer les valeurs possibles de d.

(b) Montrer que $d = 5$ si et seulement si, $n \equiv 3\,(\mathbf{mod}\ 5)$.

(c) Déterminer suivant les valeurs de l'entier n, les restes modulo 5 de 2^n.

(d) Déterminer le plus petit entier $n > 2012$ tels que : $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ 2^a + 3^b \equiv 0\,(\mathbf{mod}\ 5) \end{cases}$

EXERCICE 2 (5 points).

ABC est un triangle isocèle en A tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le projeté orthogonal de B sur (AC). Soit s la similitude indirecte de centre C telle que $s(A) = B$.

1– Montrer que le rapport de s est $\sqrt{3}$, puis préciser son l'axe.

2– Soit $B' = s(B)$.

(a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $s \circ s$.

(b) En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$. Construire B'.

(c) Montrer que $BB' = BC$ puis déduire que $s(I) = J$.

3– On muni le plan par le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u})$ et soit s' la transformation du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i\sqrt{3}\bar{z} + 1$.

(a) Donner sous forme exponentielle puis sous forme crtésienne, l'affixe de C.

(b) Montrer que $s'(C) = C$ et $s'(A) = B$ puis déduire la nature et les éléments caractéristiques de s'.

(c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $s' \circ S_{(BC)}$ où $S_{(BC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (BC).

EXERCICE 3 (7 points).

. Soit f la fonction définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et pour tout réel } x \neq 0,\ f(x) = \frac{x}{1 + x\ln x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1— Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x\ln x$.

Étudier le sens de variation de g puis déduire son signe pour $x > 0$.

2— (a) Montrer que f est définie sur $[0,+\infty[$

(b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

(c) Montrer que $f'(x)$ est de signe de $1-x$ puis étudier les variations de f.
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

(d) Tracer D et $\mathscr{C}$. (unité graphique est 2 cm)

3— Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $[0,1]$.

(a) Montrer que φ possède une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

(b) Étudier la dérivabilité de φ^{-1}.

(c) Tracer la courbe Γ de φ^{-1}

4— Soit u un réel de l'intervalle $]0,1]$. On pose $\mathscr{A}(u) = \int_u^1 f(t)dt + \int_{f(u)}^1 \varphi^{-1}(t)dt$

(a) Interpréter graphiquement le nombre $\mathscr{A}(u)$

(b) Calculer $\lim\limits_{u\to 0^+} \mathscr{A}(u)$

5— On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier $n \geq 0$ $U_{n+1} = f(U_n)$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 < U_n \leq 1$.

(b) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

(d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n\right) = \dfrac{1}{e}$

(e) Pour tout entier naturel n, On note V_n la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[U_n, U_{n+1}]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

EXERCICE 4 (4 points). Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Dans la figure donnée (voir feuille annexe), on donner la courbe (C) représentative de la fonction

$$F : x \mapsto \frac{x^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln x.$$

On note γ le cercle de centre O et de rayon et de rayon 1.

Pour tout réel $t > 0$, on note M le point de (C) d'abscisse t et soit H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et soit A le point de coordonnées $(0,1)$. Soit K le second point d'intersection de (AH) et le cercle γ.

1— Montrer que les coordonnées de K sont $\left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)$

2— (a) Montrer que (OK) est parallèle au tangente T_t à (C) au point d'abscisse t.

(b) Donner un procédé de construction géométrique de la tangente T_2 à (C) au point d'abscisse 2.

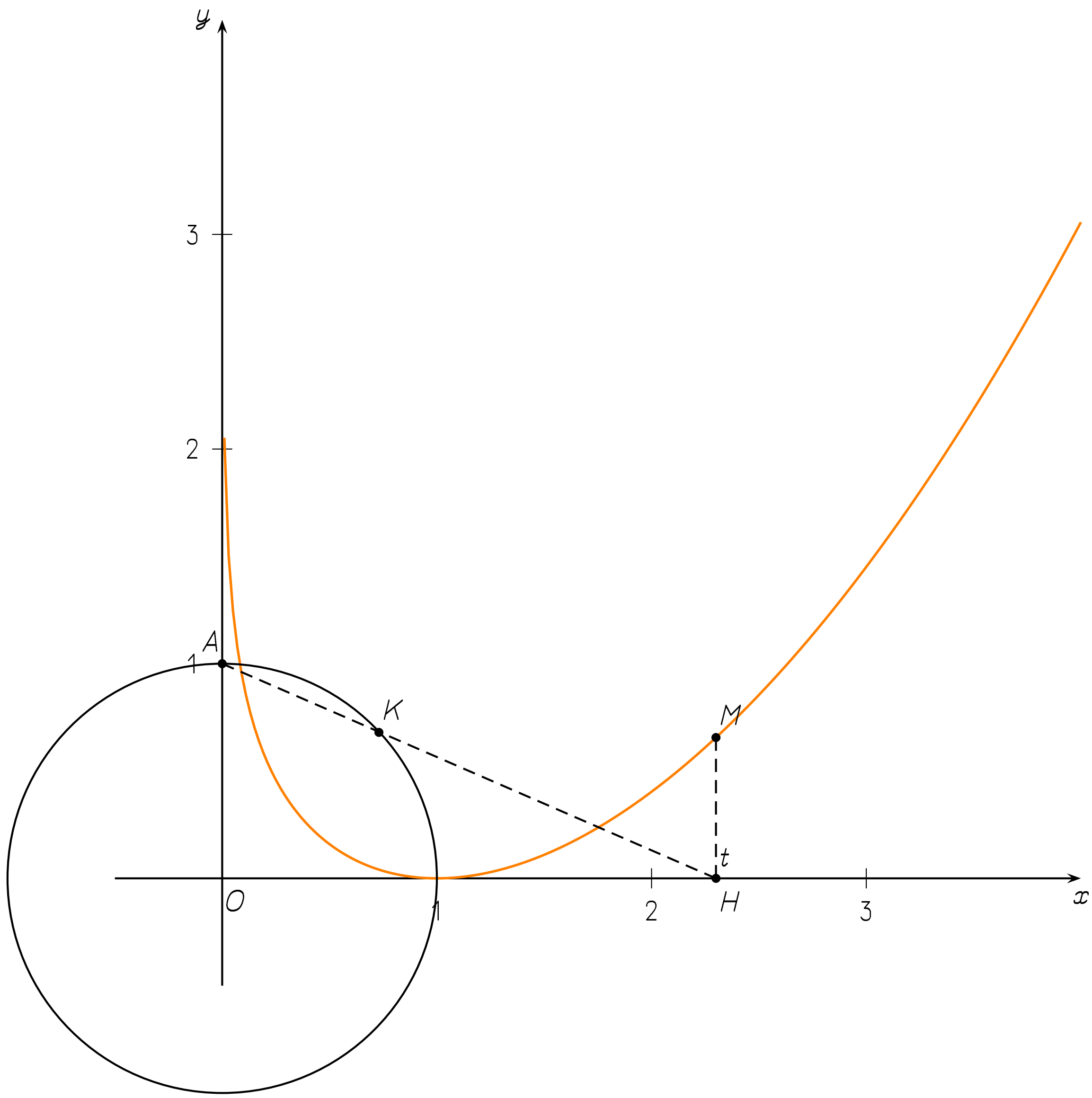
(c) Construire T_2

3— Déterminer toutes les fonction G dérivable sur $]1,+\infty[$ dont la tangente à leurs courbes représentatives au point d'abscisse t soit perpendiculaire à (OK) où K est le second point d'intersection du cercle γ et (AH) où H est le projeté orthogonale de M sur l'axe des abscisses.

FEUILLE ANNEXE

Nom :....................

Prénom :..................



Corrigé

Solutions 1. 1− $4x-5y=4\times(-1)-5\times(-1)$ d'où $4(x+1)=5(y+1)$ et comme $4\wedge 5=1$ alors 4 divise $y+1$ donc $y=4k-1$ où $k\in\mathbb{Z}$.

$y+1=4k$ où $k\in\mathbb{Z}$ et $4(x+1)=5(y+1)$ d'où $4(x-1)=5\times 4k$ où $k\in\mathbb{Z}$ donc $x=5k-1$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement : $4(5k-1)-5(4k-1)=-4+5=1$. Donc $S_{\mathbb{Z}^2}=\left\{(5k-1,4k-1);\quad \text{où}\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2− (a) $d|a$ et $d|b$ alors $d|5a-4b$ alors $d|5$ donc $d=1$ ou $d=5$.

(b) i. $''\Longrightarrow''$. Supposons que $d=5$ alors $5|4n+3$ et $5|3n+1$ alors 5 divise $4n+3-(3n+1)$ alors d divise $n+2$ d'où $n\equiv -2\,(\mathbf{mod}\ 5)$ donc $n\equiv 3\,(\mathbf{mod}\ 5)$.

ii. $''\Longleftarrow''$. Supposons que $n\equiv 3\,(\mathbf{mod}\ 5)$.
Alors $4n+3\equiv 0\,(\mathbf{mod}\ 5)$ et $3n+1\equiv 0\,(\mathbf{mod}\ 5)$ alors 5 divise a et divise b alors 5 divise d et comme $d\in\{1,5\}$ donc $d=5$.

(c) Nous avons : $2^0\equiv 1\,(\mathbf{mod}\ 5)$, $2^1\equiv 2\,(\mathbf{mod}\ 5)$, $2^2\equiv 4\,(\mathbf{mod}\ 5)$, $2^3\equiv 3\,(\mathbf{mod}\ 5)$ et $2^4\equiv 1\,(\mathbf{mod}\ 5)$.

alors : $\begin{cases} 2^n\equiv 1\,(5) & si\quad n\equiv 0\,(4)\\ 2^n\equiv 2\,(5) & si\quad n\equiv 1\,(4)\\ 2^n\equiv 4\,(5) & \quad\ \ n\equiv 2\,(4)\\ 2^n\equiv 3\,(5) & \quad\ \ n\equiv 3\,(4)\end{cases}$

(d) $2^a+3^b=8\times 16^n+3\times 27^n$.
D'autre part $16^n\equiv 1\,(\mathbf{mod}\ 5)$ et $27^n\equiv 2^n\,(\mathbf{mod}\ 5)$ d'où $2^a+3^b\equiv 3\left(1+2^n\right)\,(\mathbf{mod}\ 5)$

$2^a+3^b\equiv 0\,(\mathbf{mod}\ 5)$ il faut et il suffit $2^n+1\equiv 0\,(\mathbf{mod}\ 5)$ il faut et il suffit $n\equiv 2\,(\mathbf{mod}\ 4)$

$\begin{cases} a\wedge b=5\\ 2^a+3^b\equiv 0\,(\mathbf{mod}\ 5)\end{cases}$ il faut et il suffit que $n\equiv 2\,(\mathbf{mod}\ 4)$ et $n\equiv 3\,(\mathbf{mod}\ 5)$ et $n>2012$ signifie que $n=4x+2$ et $4x-5y=1$ et $n>2011$.
comme $x=5k-1$ d'où $n=20k-2$

$n\geq 2013$ alors $k\geq\dfrac{2013+2}{20}$ soit $k=101$ donc $n_{\text{min}}=2018$.

Solutions 2. 1− Comme $s(C)=C$ et $s(A)=B$ alors le rapport de s est :

$k=\dfrac{CB}{CA}=2\times\dfrac{BI}{AB}=2\mathbf{cos}\ \widehat{IBA}=2\mathbf{cos}\ \dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

l'axe de s **porte la bissectrice intérieure de l'angle géométrique** $\widehat{ACB}$.

2− (a) $s\circ s$ est **l'homothétie** de centre C et de rapport 3.

(b) $s\circ s(A)=B'$ donc $\overrightarrow{CB'}=3\overrightarrow{CA}$.

(c) $s(B)=B'$ et $s(A)=B$ d'où $\dfrac{BB'}{BA}=k$ et $s(C)=C$ et $s(A)=B$ d'où $\dfrac{BC}{AC}=k$ et comme $AB=AC$ donc $BB'=BC$
CBB' est isocèle en B et J est le projeté orthogonal de B sur (BB') d'où J est le milieu de $[CB']$.
Comme $I=C*B$ alors $s(I)=C*B'$ donc $s(I)=J$.

3− (a) l'affixe de C est $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ puis que $AC=1$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

(b) On a : $-i\sqrt{3}\times e^{-i\frac{2\pi}{3}}+1=-i\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=z_C$ donc $s'(C)=C$.

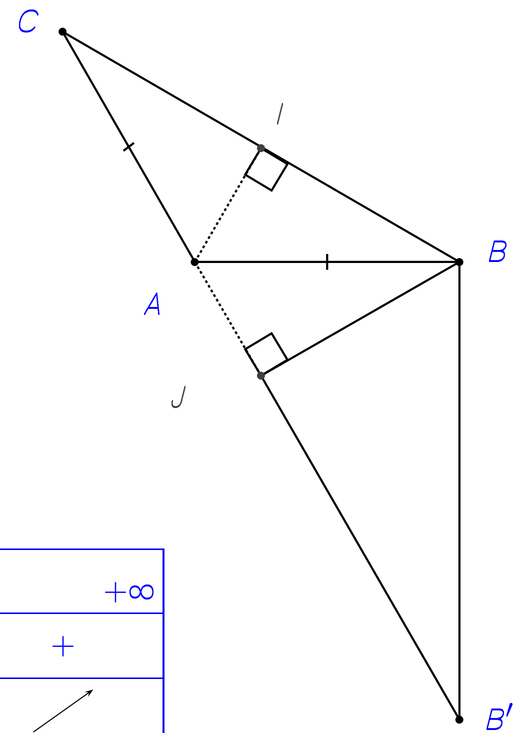
et $-i\sqrt{3}\times 0+1=1$ donc $s'(A)=B$.

s' est **une similitude indirecte** égale à s puisqu'elle coïncide avec s en deux points distincts A et C.

(c) L'ensemble des points d'affixe $e^{i\alpha}$ où α décrit $\mathbb{R}$ est un cercle C_0 de centre A et passant par B. L'ensemble cherché est l'image de C_0 par s donc cet ensemble est le cercle de centre B et passant par B'.

(d) $s'\circ S_{(BC)}$ est **une similitude directe** de centre C

(puisque ce point est fixe par cette transformation) et de rapport $\sqrt{3}$ et comme $s'\circ S_{(BC)}(B)=B'$ et $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB'}})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ c'est l'angle de cette similitude directe.



SOLUTIONS 3 (7 points). .

1− Pour tout réel $x>0$, $g'(x)=1+\ln x$

Les variations de g sont données dans le tableau suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$1+\ln x$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$1-e^{-1}>0$	$\nearrow$	

g possède **un minimum absolu strictement positif** donc pour tout réel $x>0$, $g(x)>0$.

2− (a) Pour tout réel $x>0$, $1+x\ln x\neq 0$ et $f(0)=0$ d'où le résultat.

(b) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{1+x\ln x}=1$ alors f est dérivable à droite en 0 et $\mathscr{C}$ possède une demi tangente de coefficient directeur égal à 1.

(c) Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$.

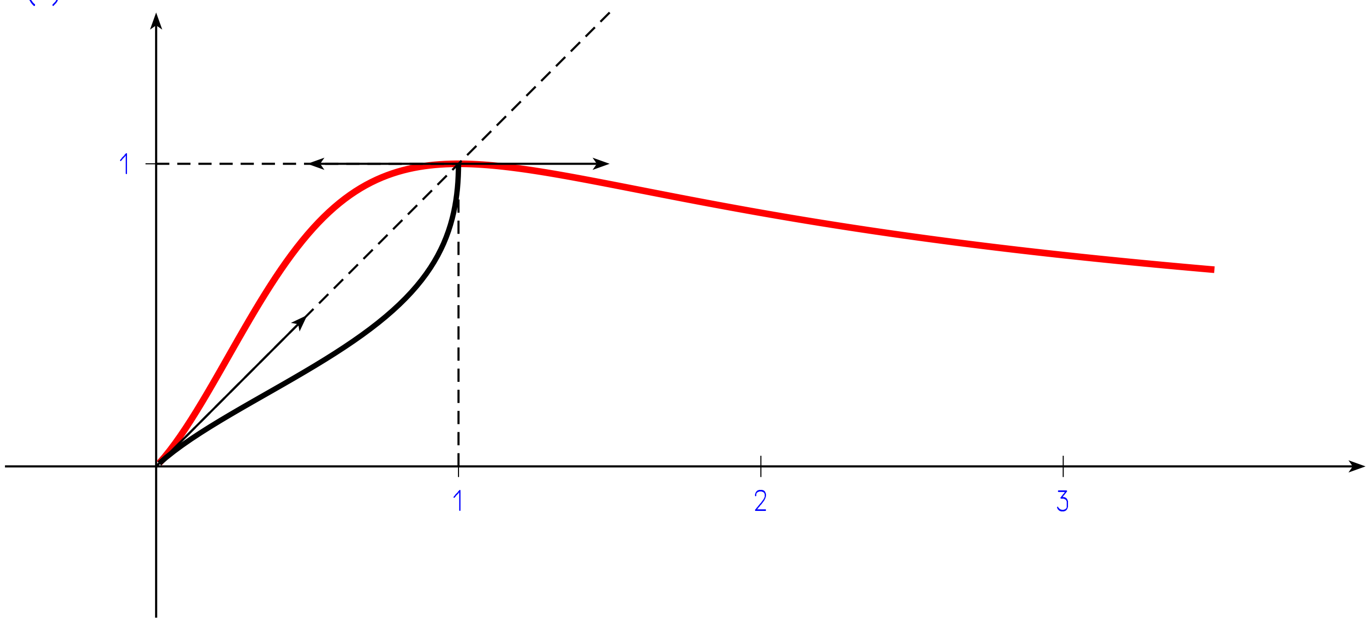
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\ln x}=0$ la droite des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Le tableau de variations de f est :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{-x^2 \ln x}{1 + x \ln x}$
Si $x \in [0, 1]$, $f(x) - x \geq 0$ d'où $\mathscr{C}$ est au dessous de D.
Si $x \geq 1$, $f(x) - x \leq 0$ d'où $\mathscr{C}$ est en dessous de D.

(d) .



3– Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

(a) φ est **continue et strictement croissante** sur $[0, 1]$ alors elle **réalise une bijection** de $[0, 1]$ sur $\varphi([0, 1]) = [0, 1]$.

(b) φ **est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas sur** $[0, 1[$, alors φ^{-1} est dérivable sur $\varphi([0, 1[) = [0, 1[$.
φ^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1. (Le symétrique d'une demi tangente horizontale par rapport la droite d'équation $y = x$ est une demi tangente verticale.

(c) Voir figure ci-dessus.

4– (a) En unité d'aire $\displaystyle\int_u^1 f(t)dt$ est l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = u, x = 1$ et $y = 0$ puisque f est continue et positive sur l'intervalle $[u, 1]$.
$\displaystyle\int_{f(u)}^1 \varphi^{-1}(t)dt$ est l'aire de la partie du plan limitée par Γ et les droites d'équations $x = f(u), x = 1$ et $y = 0$ puisque φ^{-1} est continue et positive sur l'intervalle $[f(u), 1]$.
$\mathscr{A}(u)$ est l'aire du carré de coté 1 privé de l'aire du rectangle de dimensions u et $f(u)$.
On a : $\mathscr{A}(u) = 1 - uf(u)$

(b) $\displaystyle\lim_{u \to 0^+} \mathscr{A}(u) = 1$ en appliquons le dernier résultat.

5– (a) On procède par récurrence :
$U_0 = \frac{1}{2}$ d'où $U_0 \in]0, 1]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in]0, 1]$ et comme f est strictement croissante sur $[0, 1]$, alors $f(U_n) \in]0, 1]$ donc $U_{n+1} \in]0, 1]$.
Donc pour tout $n \geq 1$, $U_n \in]0, 1]$.

(b) Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$ et comme $U_n \in]0, 1]$ alors $f(U_n) - U_n \geq 0$ donc $U_{n+1} \geq U_n$ et par la suite (U_n) est croissante.
(U_n) est **croissante et majorée** alors elle est convergente.

(c) Si ℓ est la limite de (U_n) alors $\ell \in [0,1]$ et $f(\ell) = \ell$ donc $\ell \in \{0,1\}$ et comme pour tout n, $U_n \geq \frac{1}{2}$ donc $\ell = 1$.

(d) On pourra remarquer que $\dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n} = \ln U_n$ d'où $\dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_0} = \ln\left(U_0 \times \ldots \times U_n\right)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_0 \times \ldots \times U_n = e^{-1}$

(e) f est continue sur $[U_n, U_{n+1}]$ alors il existe $W_n \in [U_n, U_{n+1}]$ tel que $V_n = f(W_n)$ comme f est continue en 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = f(1) = 1$.

SOLUTIONS 4 (4 points). t étant strictement positif.

1– On note $K(x,y)$ alors $x^2 + y^2 = 1$ et $y = 1 - \dfrac{x}{t}$, la solution de ce système est le couple $\left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)$.

2– (a) Le coefficient directeur de la droite (OK) est $\dfrac{y}{x} = \dfrac{t^2-1}{2t}$.

Pour tout $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2t} = \dfrac{t^2-1}{2t} = \dfrac{y}{x}$ donc (OK) et T_t sont parallèles.

(b) Soit H le point de coordonnées $(2,0)$, la droite (AH) coupe γ en K alors T_2 est la parallèle à (OK) passant par H.

(c) Appliquer le procédé précédent.

3– (OK) et T_t sont perpendiculaires si et seulement si les produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Donc, pour $t > 1$, $G'(t) = -\dfrac{x}{y} = -\dfrac{2t}{t^2-1}$ donc $G(t) = -\ln\left(t^2 - 1\right) + C^{te}$.