LYCÉE HAMMOUDA P.

DEVOIR DE SYNTHÈSE # 1.

4 MATH$_2$ – ANNÉE SCOLAIRE 2011–2012

Pr : Ben fredj sofiane

Le devoir dure 3 heures. Les calculatrices sont autorisées, mais : l'échange de tout matériel est interdit
Les brouillons ne sont pas acceptés dans les copies. Une copie non soignée sera sanctionnée.
Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

EXERCICE **1 (3 points).** Répondre par VRAI ou FAUX (Aucune justification n'est demandée).

1– Si $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2– Si f est continue en 1 alors f est dérivable en 1.

3– Si f est paire et si f est dérivable à droite en 0, alors elle est dérivable en 0.

4– ABC est un triangle rectangle en A. La transformation $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AC)}$ est une symétrie glissante.

EXERCICE **2 (5 points).** ABC est un triangle équilatéral de centre O.

1– Montrer qu'il existe une unique isométrie φ qui envoie A, B et C respectivement en B, C et A

2– a– Montrer que $\varphi(O) = O$.

b– Déterminer les images de C, O et A par $S_{BO} \circ \varphi$. Identifier l'application $S_{BO} \circ \varphi$.

c– Déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ.

3– M et M' sont deux points variables respectivement sur les segments $[AB]$ et $[BC]$ tels que $AM = BM'$.
Montrer que la médiatrice du segment $[MM']$ passe par un point fixe que l'on précisera.

4– Déterminer l'isométrie ψ telle que l'application $\varphi \circ \psi$ envoie B en B, A en C et C en A.

EXERCICE **3 (6 points).** .

1– Pour tous réels x et a de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $a > 0$, on pose :

$$g(x) = \sin x - x - x^3 \left(\frac{\sin a - a}{a^3} \right)$$

(a) Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $g'(c) = 0$.

(b) On pose $\theta = \dfrac{c}{a}$. Montrer que $a - \sin a = \dfrac{a^3}{3} \times \dfrac{1 - \cos(a\theta)}{(a\theta)^2}$.

(c) Déduire les résultats suivants :

(1) Pour tout $a \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \sin a < a$.

(2) $\lim_{a \to 0^+} \frac{a - \sin a}{a^3} = \frac{1}{6}$.

2− On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \text{ si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ et } f(0) = 0.$$

(a) Montrer que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{\sin x} \times \left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right).$$

(b) Déduire que f est dérivable à droite en 0.

(c) Montrer que pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

(d) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

EXERCICE 4 (**6 points**). . Pour tout réel $X \in \mathbb{R}$, on pose $P(X) = X^3 + X$. On donne dans la **figure 1** (voir feuille annexe) la courbe Γ représentative de la fonction P.

1− (a) Montrer que P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $P(X) = n$ possède une solution unique α_n dans l'intervalle $]0, \sqrt{n}[$.

(c) Placer sur l'axe des abscisses les solutions α_1 , et α_3.

(d) A l'aide du graphique donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α_3.

2− n étant un entier strictement positif.

(a) Vérifier que : $P(\alpha_{n+1}) = P(\alpha_n) + 1$

(b) Déduire que la suite (α_n) est croissante.

3− Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\left(\alpha_n\right)^2 \geq \sqrt{n} - 1$ puis déduire la limite de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4− (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{P'(\alpha_{n+1})} \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n \leq \frac{1}{P'(\alpha_n)}$.

(b) Pour tout $n \geq 2$, on note B_n le point de Γ d'abscisse α_n et soit H_n le projeté orthogonal de B_n sur l'axe des abscisses. On note β_n l'aire du triangle OH_nB_n.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$

FEUILLE ANNEX (1) À RENDRE

Nom :..............................

Prénom : ....

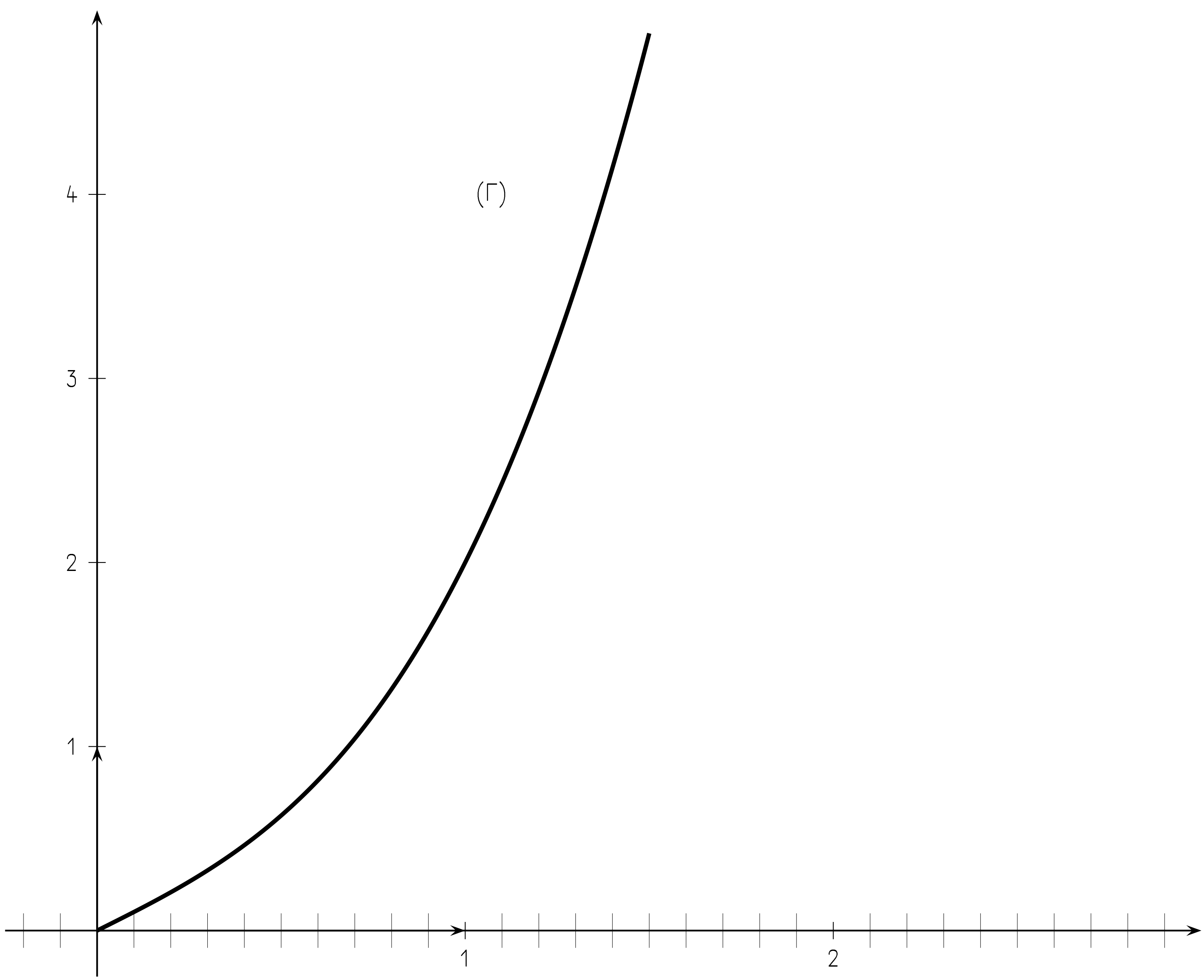

Figure 1

SOLUTION 1 (3 points). .

1– V

2– F

3– F

4– F

SOLUTION 2 (5 points). ABC est un triangle équilatéral de centre O.

1– $AB = BC$, $AC = BA$ et $BC = CA$ justifie l'existence d'une unique isométrie du plan transformant respectivement A, B et C en B, C et A.

2– a– L'image du triangle ABC par l'isométrie φ est ABC, et comme φ conserve le barycentre alors $\varphi(O) = O$.

b–
- $S_{OB} \circ \varphi(C) = S_{OB}(A) = C$,
- $S_{OB} \circ \varphi(O) = S_{OB}(O) = O$,
- $S_{OB} \circ \varphi(A) = S_{OB}(B) = B$

$\varphi \circ S_{OB}(A) \neq A$ alors $\varphi \circ S_{OB} \neq$ **id** .
C, O sont deux points distincts fixes par $\varphi \circ S_{OB}$ donc $\varphi \circ S_{OB}$ est une symétrie orthogonale d'axe (OC).

c– $\varphi \circ S_{OB} = S_{OC}$ équivaut à $\varphi = S_{OB} \circ S_{OC}$ donc φ est une rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}})$

3– On a : $AM = \varphi(A)\varphi(M) = B\varphi(M) = BM'$ et comme $\varphi(M) \in [BC]$ car l'image du segment $[AB]$ par φ est le segment $[BC]$ alors $\varphi(M) = M'$ et par la suite la médiatrice du segment $[MM']$ passe par le point O.

4– La transformation $\varphi \circ \psi$ est une rotation ou une symétrie orthogonale (puisqu'elle possède un point fixe et elle est différente de **id** .

Supposons que $\varphi \circ \psi$ est une rotation alors elle est de centre B et comme $\varphi \circ \psi(A) = C$ et $\varphi \circ \psi(C) = A$ alors B est le milieu du segment $[AC]$ ce qui est contradictoire.

Donc $\varphi \circ \psi = S_{OB}$ et $\psi = \varphi^{-1} \circ S_{BO} = S_{OC}$.

SOLUTION 3 (6 points). .

1– (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, a]$ et comme $g(0) = g(a) = 0$ d'après le théorème de ROLLE, in existe $c \in]0, a[$ tel que $g'(c) = 0$.

(b) Pour tout réel x, $g'(x) = \cos x - 1 - 3x^2\left(\dfrac{\sin a - a}{a^3}\right)$.

$g'(c) = 0$ équivaut à $\cos c - 1 = 3c^2\left(\dfrac{\sin a - a}{a^3}\right)$ d'où $\dfrac{\cos c - 1}{c^2} = 3 \times \left(\dfrac{\sin a - a}{a^3}\right)$

D'autre part $c = a\theta$ d'où:

$\dfrac{\cos(a\theta) - 1}{(a\theta)^2} = 3 \times \left(\dfrac{\sin a - a}{a^3}\right)$ donc $a - \sin a = \dfrac{a^3}{3} \times \dfrac{1 - \cos(a\theta)}{(a\theta)^2}$.

(c) (1) $a \in]0, \frac{\pi}{2}]$, comme $1 - \cos(a\theta) > 0$ d'où $a - \sin a < 0$ donc $a < \sin a$.

(2) $\lim\limits_{a \to 0+} \dfrac{a - \sin a}{a^3} = \lim\limits_{a \to 0+} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1 - \cos(a\theta)}{(a\theta)^2} = \dfrac{1}{3} \times \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{1 - \cos t}{t^2} = \dfrac{1}{6}$.

2– (a) Pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin x} \times \left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{1 - \cos x}{x^2}\right) &= \frac{x}{\sin x} \times \left(\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{x - x\cos x}{x^3}\right) \\
&= \frac{x}{\sin x} \times \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\right) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} \\
&= \frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{f(x)}{x}
\end{aligned}$$

(b) D'après ce qui précède : $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \times \left(-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$.

alors f est dérivable à droite en 0 donc $f'_d(0) = \dfrac{1}{3}$.

(c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$

(d) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - \sin^2 x = (x - \sin x)(x + \sin x)$ or pour tout réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on a : $x^2 - \sin^2 x > 0$ (puisque $x > \sin x$ dans l'intervalle d'étude) donc $f'(x) < 0$ et par la suite f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Le tableau de variation de f est :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\pi}$

SOLUTION 4 (6 points). .

1– (a) Pour tout réel x, on a :$P'(x) = 3X^2 + 1$.

Pou tout réel x, $P(X) > 0$ donc P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Notons $Q(X) = X^3 + X - n = P(X) - n$.

- Q est continue sur $[0, \sqrt{n}]$

- $Q(0) = -n < 0$ et $Q(\sqrt{n}) = n\sqrt{n} + \sqrt{n} - n = n(\sqrt{n} - 1) + \sqrt{n} > 0$.
- Q est strictement croissante sur $[0, \sqrt{n}]$

alors l'équation $Q(X) = 0$ (et par la suite l'équation $P(X) = n$) possède une solution unique α_n dans $]0, \sqrt{n}[$.

(c) Voir figure.

(d) $1.2 < \alpha_3 < 1.3$.

2– (a) $P(\alpha_{n+1}) = n + 1$ et $P(\alpha_n) = n$ d'ou le résultat.

(b) Soit n un entier tel que $n \geq 1$.
$P(\alpha_{n+1}) > P(\alpha_n)$ et P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

3– On a $\alpha_n^3 + \alpha_n = n$ donc $(\alpha_n)^2 + 1 = \dfrac{n}{\alpha_n}$

D'autre part $0 < \alpha_n < \sqrt{n}$ d'où $0 < \dfrac{\alpha_n}{n} < \dfrac{\sqrt{n}}{n}$ c'est a dire $0 < \dfrac{\alpha_n}{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ d'où $\dfrac{n}{\alpha_n} > \sqrt{n}$

et par la suite $(\alpha_n)^2 > \sqrt{n} - 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - 1) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^2 = +\infty$ et comme $\alpha_n > 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

4– (a) En appliquant le théorème des accroissement finis :
P est dérivable sur l'intervalle $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ donc il existe un réel $t \in]\alpha_n, \alpha_{n+1}[$ tel que :
$P(\alpha_{n+1}) - P(\alpha_n) = (\alpha_{n+1} - \alpha_n)P'(t)$ d'où $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{P'(t)}$.

Comme $t \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ alors $\dfrac{1}{P'(\alpha_{n+1})} \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n \leq \dfrac{1}{P'(\alpha_n)}$.

(b) On a $\beta_n = \dfrac{1}{2} \times n \times \alpha_n$ et $\dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$

D'autre part : $\dfrac{1}{P'(\alpha_{n+1})} \times \dfrac{1}{\alpha_n} \leq \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 \leq \dfrac{1}{P'(\alpha_n)} \times \dfrac{1}{\alpha_n}$.

$P'(\alpha_n) = 3\alpha_n^2 + 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} P'(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P'(\alpha_{n+1}) = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$.

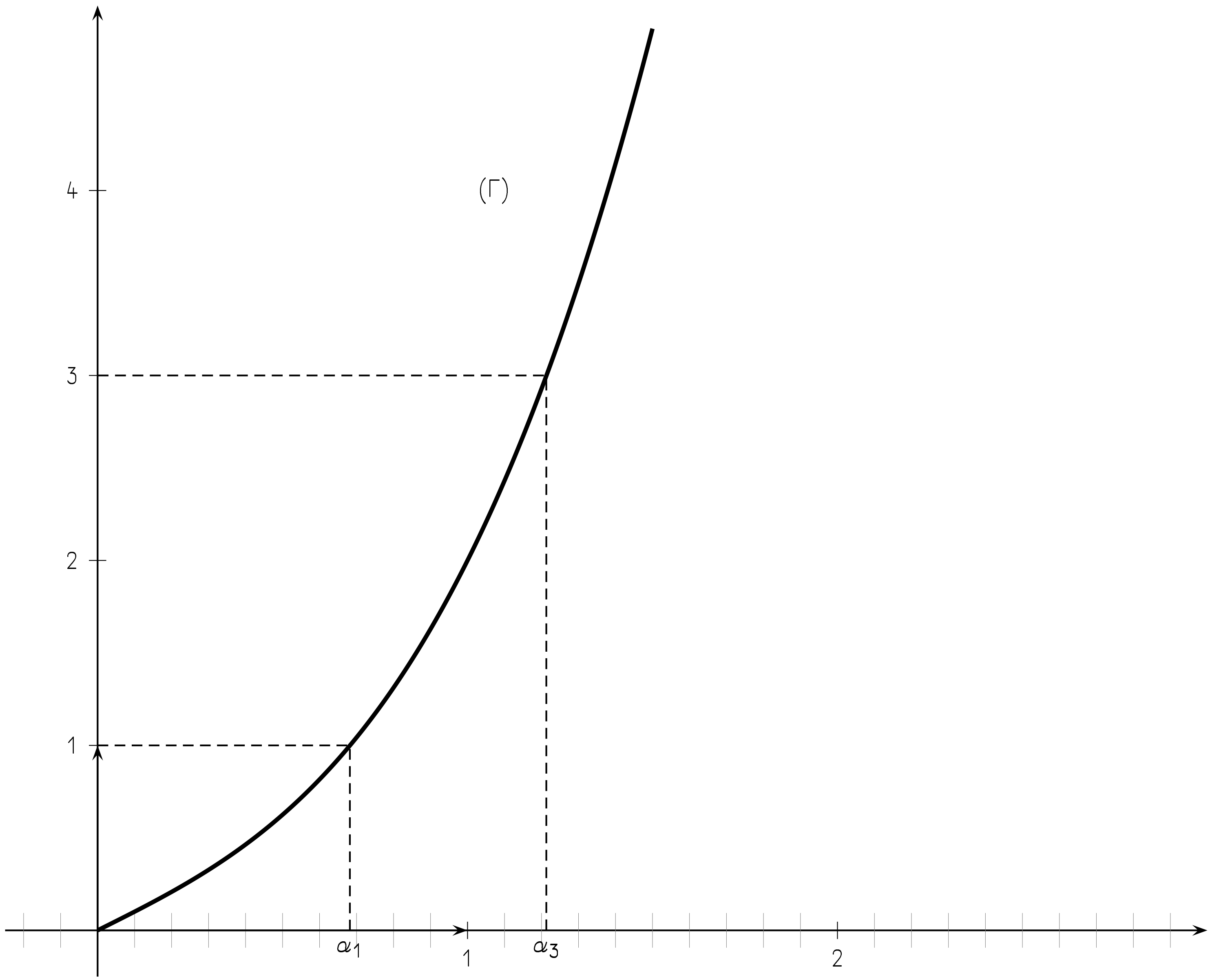

Figure 1