Lycée O.CH.M'SAKEN	Mr. karmous. A.	3° année MATH
Série d'exercices (suites réelles)		

EXERCICE 1

Soit la suite (U_n) definie sur IN par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)} u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$ $\forall\, n \in IN$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall\, n \in IN^*$; $U_n < 3$
   b) Etudier la monotonie de la suite U

2) On considère la suite V définie sur IN^* par $V_n = n\,(3 - U_n)$.

   a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme V_1

   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

   c) Calculer la limite de la suite U

EXERCICE 2

Soit la suite (U_n) définie sur IN^* par $U_n = \frac{n}{3^n}$

1) a – Montrer que (U_n) n'est pas une suite géométrique .
   b- Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $U_n > 0$
   c- Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$
   d) En déduire que la suite (U_n) est décroissante .

2) a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $U_n \leq (\frac{2}{3})^n$

   b- En déduire que (U_n) est convergente .

3)Soit $n \in IN^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$. Montrer que la suite (S_n) est croissante et majorée par 2 .

Exercice n° 3

On considère la suite (u_n) définie sur $IN^\bullet$ par : $u_n = \dfrac{3^n}{n}$.

1) a- Montrer que, pour tout n$\in IN^\bullet$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

b- En déduire que, la suite u est croissante.

2) Montrer que, pour tout n$\in IN^\bullet$, $u_n \geq 3n-3$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice n° 4

Soit u la suite réelle définie sur *IN* par : $u_0 = 1$ et pour tout n$\in IN$, $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} u_n$.

1) a- Montrer que la suite u est décroissante et minorée.

b- En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$.

a- Montrer que la suite v est géométrique; et déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

b- En remarquant que, $u_n - \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{n}{2^n}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{n}{2^n})$.

3) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^{k+1}}$ où n$\in IN^{\bullet}$.

a- Montrer que pour tout $k \in IN$; on a : $u_k - u_{k+1} = \dfrac{k}{2^{k+1}}$.

b- Montrer que, $S_n = 1 - u_n$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE 5

On considere la suite U definie par $U_o = 2$ et pour tout n $\in$ IN ; $U_{n+1} = \dfrac{3+U_n}{5-U_n}$

1) a – Montrer que pour tout entier naturel n on a : $1 \leq U_n \leq 2$
   b- Montrer que U est décroissante .
2) a- Montrer que : $U_{n+1} - 1 \leq \dfrac{2}{3} (U_n - 1)$

   b – En déduire que pour tout entier naturel n ; $U_n - 1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

   c – Déterminer la limite de la suite U .
3) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$ pour $n \in$ IN . Montrer que $n \leq S_n \leq n + 3.[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
4) On pose $V_n = \dfrac{3-U_n}{U_n - 1}$

   a – Montrer que V est une suite géométrique de raison 2
   b- Déterminer U_n en fonction de n puis retrouver la limite de la suite U

   c- Pour tout entier naturel n ; on pose $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k - 1}$. Déterminer S'_n en fonction de n

   puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$.