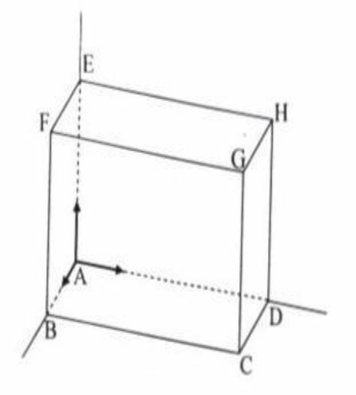
Lycée O.CH.M'SAKEN	Mr. karmous. A.	4° année MATH
Série d'exercices (géométrie dans l'espace)		

EXERCICE N°1

l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



ABCDEFGH est un parallélépipède tel que :$\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$,et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$

1) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs :
$\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3. Soit V le volume du tétraèdre MEBG.

a) Exprimer V en fonction de α.

b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG.

c) Pour quelles valeurs de α, V est – il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?

Exercice 2

l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(3, 2, 6) ; B(1, 2, 4) et C(4, -2, 5).

1. a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Montrer que OH = $\frac{4}{3}$.

3. Soit S la sphère de centre O et passant par A.

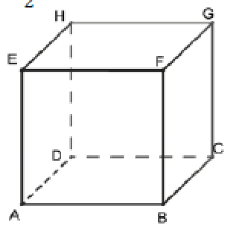
   a) Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle ζ de centre H.

   b) calculer le rayon du cercle ζ.

EXERCICE3

ABCDEFGH est un cube . L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$



1°)- a – Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EL}$

b – En déduire l'aire du triangle LEI

c – Montrer que la droite (AK) est perpendiculaire au plan (LEI)

2°)- a – Calculer le volume V du tétraèdre ELIK

b – En déduire la distance du point K au plan (LEI)

3)- Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ et S la sphère de centre C et passant par G.

a- Déterminer une équation réduite de S' image de S par l'homothétie h .

b- Montrer que (EFH) est le plan tangent commun de S et S' au point G

c- Montrer qu'il existe exactement 2 homothéties qui transformes S en S' , caractériser chacune des homothéties .

EXERCICE4

L'espace est rapporté d'un repère orthonormé direct (o , i , j , k) . On considère le tétraèdre ABCE

tel que A (1, 0 , 2) , B (0 , 0 , 1) , C (0 , – 1, 3) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1) a- Vérifier que E a pour coordonnées (0, 2 , 3) .
b – Calculer le volume du tétraèdre ABCE

2) a – Soit P le plan d'équation : x -2y – z + 5 = 0 .Montrer que P est parallèle au plan (ABC)

b - Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan P .

2) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K
a– Déterminer le rapport de h .

b– Le plan P coupe les arrêtes $[E\ A]$ et $[E\ B]$ respectivement en I et J .Calculer le volume du tétraèdre EIJK

EXERCICE 5

On donne les points A(3,1,0) , B(1,2,0) , C(3,2,1) et D(0,0,m) où m est un réel positif.

1. a. Calculer $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b. En déduire l'aire du triangle ABC.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan P = (ABC). Prouver que $D \notin P$

2. Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $V = \dfrac{2m+5}{6}$

3. Soit S_m l'ensemble des points M(x,y,z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$.
Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}_+$ S_m est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

4. a. Montrer que S_m est tangente à P ssi m = 2.
Montrer dans ce cas que la droite (DB) est perpendiculaire au plan P.

b. En déduire le point de contact de S_2 et P.

Exercice 6

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$, on considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M .

On note A le milieu de l'arête [IL] et B le point défini par : $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$.

On appelle P le plan passant par les points O, A et B.

1. a. Préciser les coordonnées des points A et B.

b. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

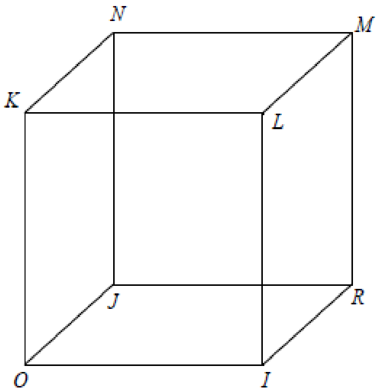
2. a. Montrer que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

b. Le point $C\left(1\,;\frac{1}{3};1\right)$ appartient-il à P ?

3. On considère le tétraèdre OABK.

a. Montrer que son volume vaut $\frac{1}{9}$.

b. En déduire la distance du point K au plan P.



Exercice 7

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace tel que AB = 1.
On munit l'espace du repère orthonormé direct (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)
1. a. Déterminer les coordonnées des points B, C, D, E, F, G et H.
b. Vérifier que $\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AG}$
. En déduire l'aire du triangle EDB.
c. Donner une équation cartésienne du plan P passant par les points E, D et B.
d. Calculer le volume du tétraèdre EDBG.

2. On désigne par S l'ensemble des points M(x ,y ,z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{1}{2} = 0$
a. Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
b. Vérifier que $\Omega \in$(AG)et que la droite (HC) est tangente à S.
c. Montrer que S $\cap$ Pest un cercle dont on précisera le centre et le rayon .
3. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport 2 et par Q le plan passant par les points H, F et C. Montrer que h(P) = Q

Exercice 8

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit les points A(1,2,1), B(2,2,0), C(0,4,1) et D(3,2,2).
1) a- Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC.
b- Soit P le plan contenant les points A, B et C. Montrer que P à pour équation : $2x + y + 2z - 6 = 0$.
c- Calculer la distance du point D au plan P. En déduire une équation cartésienne de la sphère S de centre D et tangente au plan P.
2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2 et $S' = h(S)$.
a- Préciser le centre et le rayon de S'.
b- Déduire que P coupe S' suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 9

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(-1,1,1)$; $B(1,-1,0)$; $C(1,1,2)$ et $D(3,3,-1)$.

1) a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire l'aire du triangle ABC.

c) Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $x+2y-2z+1=0$

2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

3) Soient H et H' les projetés orthogonaux du point D respectivement sur le plan (ABC) et sur la droite (AB).

a) Sans calculer les coordonnées des points H et H', calculer les distances : DH, DH' et HH'.

b) Montrer que H a pour coordonnées $(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$.

4) Soit S la sphère de centre D et de rayon 4 et soit t la translation de vecteur $\vec{u}=-\vec{i}+\vec{k}$.

a) Vérifier que S est tangente à P = (ABC) en H.

b) Déterminer l'expression analytique de t.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan P' image de P par t.

d) Caractériser $S' = t(S)$ et Déterminer la position relative de S' et P'.

Exercice 10

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points $A(0,4,0)$, $B(0,0,4)$ et $C(2,0,4)$.

1) a) Montrer que les droites (OA) et (OC) sont orthogonales .

b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

c) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).

2) Soient D et H les images respectives des points A et O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

a) Montrer à partir de la première question que O, A, B et C appartiennent à la sphère S de diamètre [AC].

b) D et H sont-ils des points de S ? Donner une équation de S.

c) Déterminer l'intersection de S et du plan Q contenant les points A, B et H.

3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2 , on note Q' le plan image de Q par h.

a) Montrer que C et D appartiennent à Q'.

b) Soit S' la sphère image de S par h, quel est l'intersection de S' et Q' ?.

Exercice 11 (QCM)

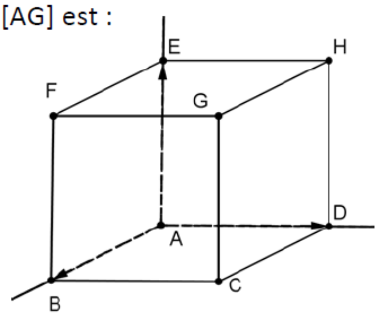
Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. L'espace est rapporté au repère ON direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) Une équation cartésienne du plan médiateur du segment [AG] est :

a) $2x + 2y + 2z - 3 = 0$.

b) $x + y - 1 = 0$.

c) $-2x + 2y + 2z - 1 = 0$.



2) Le volume du tétraèdre ABDG est :

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{2}$.

3) Soit I le point de l'espace défini par $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$. L'homothétie de centre I qui transforme le plan (ACF) en (EDG) a pour expressions analytiques :

a) $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \\ z' = -2z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -2x + 2 \\ y' = -2y \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y \\ z' = 2z + 3 \end{cases}$.

Exercice 12

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A(1,-1,2) ; B(2 ,-1 ,1) ; C(-2,0,4) , D(0,-2, 1) et E $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{5}{2})$.

1) a. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$.

b. En déduire que A ,B et C déterminent un plan P et donner la position relative de la droite (DA) par rapport à P.

2) a. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. En déduire le volume du tétraèdre DABC.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z + 2 = 0$.

Montrer que (S) est une sphère et préciser son centre et son rayon R.

4) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $(-\frac{1}{2})$.

a. Déterminer h(D).

b. Soit (S') la sphère de centre E passant par A. Montrer que h((S)) = (S')

c. En déduire que le plan (ABC) est tangent aux deux sphères S et S' en A.