Classe : 4ème MATH
Prof : Mohamed Khairedine Kharrat

Date : novembre 2008
Durée : 2H

DEVOIR DE CONTROLE N°1
MATHEMATIQUES

Exercice N°01

Pour chacune des question suivantes, une seule des trois réponse proposées est exacte Le candidat indique sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

Une réponse correcte vaut 1 point une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. On considère les points $N\left(1+i\sqrt{3}\right)$ et $M\left(\sqrt{3}+i\right)$

$a)$ $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ b) $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ c) $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

2. On considère les ponts $A(1+i), B(2+3i) et\ C(3)$.le triangle ABC est

a) isocèle en A seulement b) rectangle en A seulement c) isocèle et rectangle en A

3. La suite $U_n = 1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{5}\right)^n$

a) La suite Uest diverge b) la suite U converge vers $\frac{5}{2}$ c) $U_n = \frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$

Exercice N°02

La courbe ζ_f(figure 1) représente dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une fonction $f$definie sur $IR\backslash\{2\}$. $\zeta_f$possède une asymptote d'équation $x = 2$,deux demies tangentes au point $A(1;1)$d'équations $x = 1\ et\ y = 1$,une tangente au point $B(4;1)$d'équation $y = -x + 5$ et une branche infinie parabolique de direction $(O.\vec{i})\ en - \infty$

1) Déterminer graphiquement :

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $f([1;2[$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)$

La courbe ζ_g(figure 2) représente dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une fonction g définie sur $]0;+\infty[$. $\zeta_g$possède une asymptote d'équation $y=3$ en $+\infty$,et une tangente au point $C(1;1)$d'équation $y=2x-1$,

2) Déterminer graphiquement : $\lim_{x\to+\infty} g(f(x))$; $\lim_{x\to 2^+} g(f(x))$; $(g\circ f)'(4)$

Exercice N°03

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2e^{i\theta}z+e^{2i\theta}-1=0$ où $\theta\in[0;\pi]$
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct$(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ où $z_1=e^{i\theta}-1$ et $z_2=e^{i\theta}+1$
   a) Déterminer l'ensemble des points M_1 quand $\theta\ varie\ dans[0;\pi]$
   b) Montrer que $\overrightarrow{M_1M_2}=2\vec{u}$ en déduire l'ensemble des points M_2 quand $\theta\ varie\ dans[0;\pi]$
3) a) Ecrire $z_1\ et\ z_2$ sous la forme exponentielle. En déduire que $\overrightarrow{OM_1}\perp\overrightarrow{OM_2}$.
   b) Déterminer θ pour que l'aire de triangle OM_1M_2 soit égale à 1.

Exercice N°04

Soit u une suite définie sur INpar : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n-1}} \end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout $n\in IN, u_n\geq 2$.
   b) Montrer que la suite u est décroissante.
   c) En déduire que u est convergente et calculer sa limite.
2. a) Montrer que pour tout $n\in IN$ $0\leq u_{n+1}-2\leq\frac{1}{4}(u_n-2)$.
   b) En déduire que pour tout $n\in IN$ $0\leq u_n-2\leq(\frac{1}{4})^n$.
   c) Retrouver la limite de u .
3. Pour tout $n\in IN^*$on pose $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}u_k$.
   a) En utilisant 2) b)
   montrer que pour tout $n\in IN^*$ on a $2\leq S_n\leq 2+\frac{4}{3n}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$.
   b) En déduire la limite de (S_n) .

BON TRAVAIL