Lycée Assad Ibn Alfourat Oued Ellil — **Année scolaire : 2011 – 2012**

Classe : 4ème r Tech — **Discipline : Mathématiques**

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

Durée : 2 heures

EXERCICE1 : (4 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit M (z) et M' (z'). La distance MM' est égale à :

a) $|z+z'|$ **b)** $|z|-|z'|$ **c)** $|z'-z|$

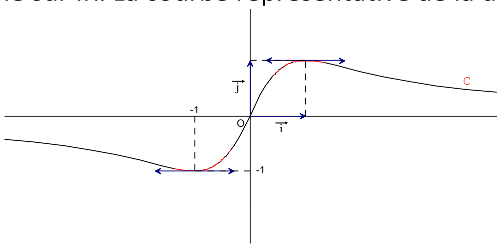
2) Soit les nombres complexes : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_3 = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{7\pi}{6}}$

a) $z_1 z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ **b)** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ **c)** $z_1^{\,3} = 1$

3) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2+z+1=0$ est :

a) $\left\{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ **b)** $\varnothing$ **c)** $\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

4) f est une fonction définie dérivable sur IR. La courbe représentative de la dérivée f' de f est donnée ci-dessous.



a) f admet un maximum sur IR.

b) La courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

c) Le tableau de variation de f est :

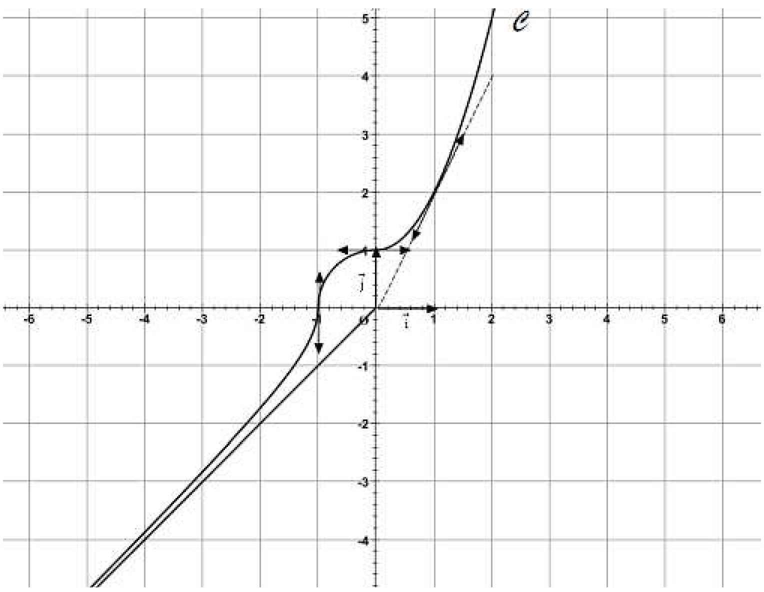
	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		↘		↗	

EXERCICE2 : (4,5 POINTS)

Sur la figure ci-dessous C désigne la courbe représentative d'une fonction f.

On sait que :

- La droite Δ d'équation y = x est asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.
- La courbe C de f admet une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.



1) a) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)}{x+1}$.

2) Déterminer $f'(0)$ et $f'(1)$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que l'équation f(x) = $\frac{1}{2}$ admet une solution unique $\alpha \in \left]-1\,,\,0\right[$.

EXERCICE 3 : (5,5 POINTS)

I- Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

2) Dresser le tableau de variation de g .

3) En déduire que pour tout $x \in IR$, $g(x)>0$

II- Soit la fonction définie sur IR par $g(x)=x+\sqrt{1+x^2}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Etudier la dérivabilité de f sur IR puis dresser son tableau de variation.

EXERCICE 4 : (6 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-2(2+i)z+4+4i=0$

2) On considère l'équation (E) : $z^3-4(2+i)z^2+12iz+8(1-i)=0$

a) Vérifier que 2i est une racine de (E)

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

c) On considère les points A, B et C d'affixes respectives 2, $2+2i$ et $2i$, montrer que OABC est un carré

3) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2-2(2+e^{i\theta})z+4+4e^{i\theta}=0,\ \theta\in\left]0\,,\,\pi\right[$

b) vérifier que $2\left(1+e^{i\theta}\right)=4\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta}$

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $2\left(1+e^{i\theta}\right)$ lorsque θ varie sur $\left]0\,,\,\pi\right[$