☞ Marche à suivre pour étudier une fonction :

✍ Rechercher l'ensemble de définition de la fonction.

✍ Étudier la parité de la fonction.

✍ Calculer les limites éventuelles aux bornes de la définition.

✍ Dresser le tableau des variations de la fonction.

✍ Travailler les asymptotes de la fonction.

✍ Situer la courbe représentative de la fonction par rapport aux éventuelles asymptotes.

✍ Travailler les tangentes remarquables à la courbe de la fonction (tangentes horizontales, tangentes verticales, points anguleux, points d'inflexions...)

✍ Construire la courbe représentative et les asymptotes de la fonction.

☞ Comment montrer qu'une fonction est paire ?

✎ Il faut vérifier que : $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f \\ \forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Conséquence : Il suffira donc d'étudier la fonction sur $[0, +\infty[\cap D_f$, puis de déduire le reste de la courbe par symétrie l'axe des ordonnées.

☞ Comment montrer qu'une fonction est impaire ?

✎ Il faut vérifier que : $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f \\ \forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Conséquence : Il suffira donc d'étudier la fonction sur $[0, +\infty[\cap D_f$, puis de déduire le reste de la courbe par symétrie rapport à l'origine du repère.

☞ Comment montrer qu'une courbe admet le point $A(a, b)$ comme centre de symétrie ?

✎ Il faut vérifier que : $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f,\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

Conséquence : Il suffira donc d'étudier la fonction sur $[a, +\infty[\cap D_f$, puis de déduire le reste de la courbe par symétrie centrale de centre $A(a, b)$.

☞ Comment montrer qu'une courbe admet l'axe $\Delta : x = a$ comme axe de symétrie ?

✎ Il faut vérifier que : $\begin{cases} x \in D_f \Leftrightarrow 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f,\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

Conséquence : Il suffira donc d'étudier la fonction sur $[a, +\infty[\cap D_f$, puis de déduire le reste de la courbe par symétrie axiale d'axe Δ.

☞ Comment montrer qu'une fonction est périodique ?

✎ Il s'agit de trouver un réel T tel que pour tout réel x appartenant à l'ensemble de définition de f, alors $f(x+T) = f(x)$.
Conséquence : Il suffira alors d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0, T]$, puis de déduire le reste de la courbe par des translations successives de vecteur $kT\overrightarrow{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

☞ Comment déterminer : Positions relatives de courbes. Intersection de courbes ?

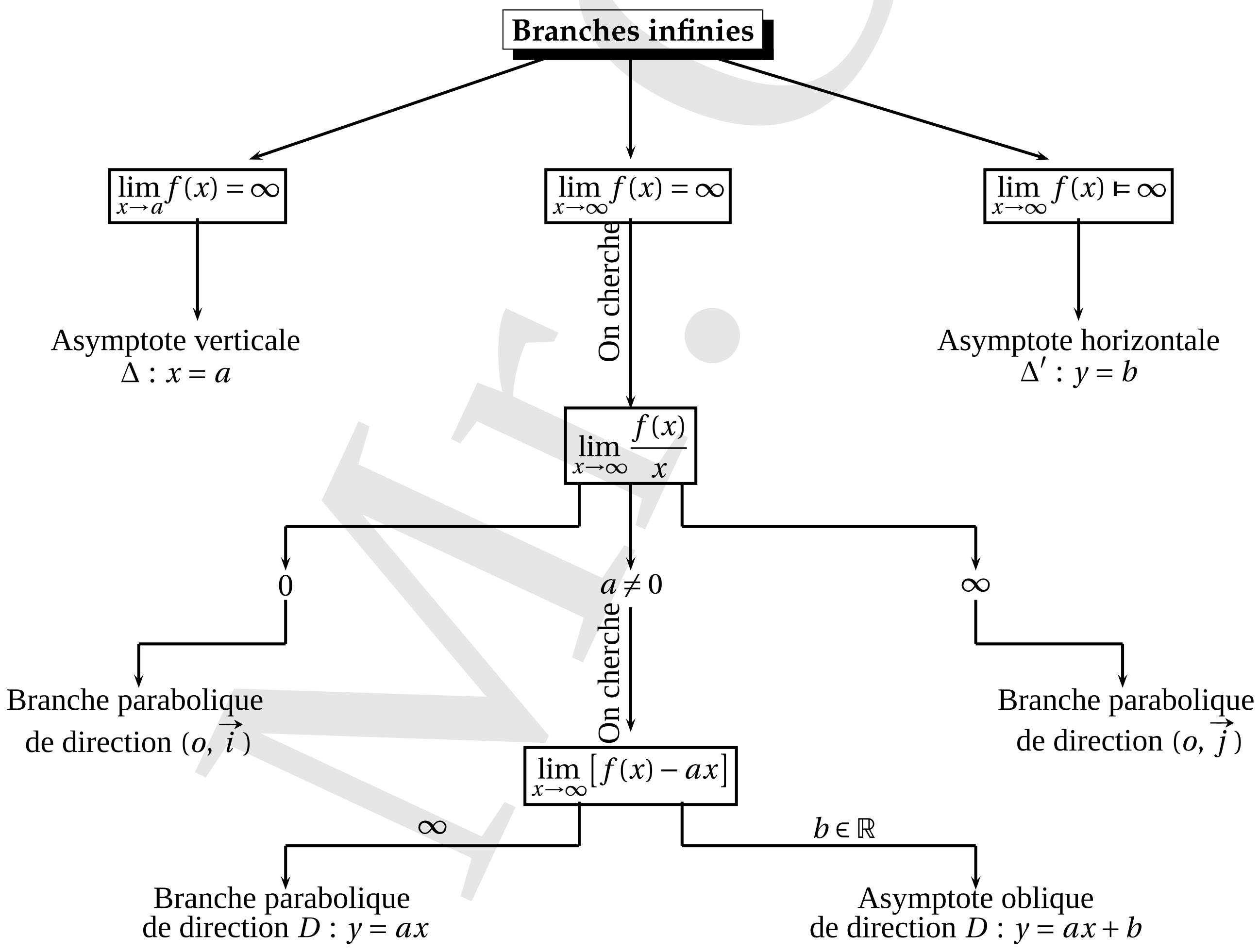
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Le signe de $f - g$ fournit les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:

  ✍ si $f - g \geq 0$ sur I, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur I.,

  ✍ si $f - g \leq 0$ sur I, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur I.

☞ Comment démontrer qu'une courbe admet une asymptote ?

Il faudra suivre la procédure suivante.



☞ Comment déterminer les tangentes horizontales à une courbe ?

✎ $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $A(a, f(a)) \Leftrightarrow f'(a) = 0$.

☞ Tangentes verticales à une courbe

✎ si f est continue en a et $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} \dfrac{f(x) - f(x)}{x - a} = \infty$ alors $(\mathscr{C}_f)$ admet un demi-tangente verticale au point $A(a, f(a))$.

☞ Comment déterminer les points d'inflexions d'une courbe ?

✎ Les points d'inflexion sont ceux où la tangente traverse la courbe justement au point M. Si f est deux fois dérivables alors
$A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f \Leftrightarrow$ la dérivée seconde f'', s'annule et change de signe en a.

☞ Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle

✎ Toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle réalise une bijection de I sur $f\langle I\rangle$.

☞ Définition d'une fonction réciproque

✎ Soit f un fonction bijective de I sur $J = f\langle I\rangle$. On appelle fonction réciproque de f l'application notée f^{-1} définie de $J = f\langle I\rangle$ sur I par : $\forall x \in J; \forall y \in I; f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

☞ Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

☞ Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Si pour tout $t \in]a, b[$, $m \leqslant f'(t) \leqslant M$, alors pour tout $x, y \in [a, b]$, tel que $x < y$, on a : $m(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M(y - x)$

☞ Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leqslant M$, alors pour tout $x, y \in I$, on a : $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$

☞ Dérivées des fonctions usuelles

f(x)	**f'(x)**	**conditions sur x**
constante	0	x réel quelconque
$ax + b$	a	x réel quelconque
x^n($n \in \mathbb{Z}$)	nx^{n-1}	si n positif : x réel quelconque, si n négatif : $x \geqslant 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	x réel quelconque
$\cos x$	$-\sin x$	x réel quelconque
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\text{cotan} x$	$-(1 + \text{cotan}^2 x)$	$]k\pi, \pi + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

☞ Théorèmes d'opérations

f(x)	**f'(x)**	**conditions sur x**
$k \times u(x)$ (k constante réelle)	$k \times u'(x)$	u dérivable en x
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	u et v dérivables en x
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	u et v dérivables en x
$[u(x)]^n$($n \in \mathbb{Z}$)	$nu'(x)\,[u(x)]^{n-1}$	si n positif : u dérivable en x si n négatif : u dérivable en x et $u(x) \neq 0$
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$	u dérivable en x, $u(x) \neq 0$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$	u et v dérivables en x, $v(x) \neq 0$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2u(x)}$	u dérivable en x et $u(x) > 0$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$	u dérivable en x
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$	u dérivable en x
$\tan(u(x))$	$u'(x)\left(1 + \tan^2(u(x))\right)$	u dérivable en x et $u(x) \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$