Résumé de cours : Suites réelles.

Suites géométriques

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique s'il existe un $q\in\mathbb{R}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=qu_n$

Méthodes

Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes non nuls est géométrique, on montre que le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante (i.e indépendant de n).

Propriétés d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q on a alors :

- $\forall p,n\in\mathbb{N},\ u_n=u_p\times q^{n-p}$; $\quad u_n=u_0\times q^n$
- Si $q\neq 1, u_0+u_1+\ldots u_n=u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Si $q\in]-1,1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_0+u_1+\ldots+u_n)=u_0\dfrac{1}{1-q}$
- Si $q>1$ et $u_0\neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=[\text{signe } u_0]\infty$.
- Si $q=1$ la suite est constante i.e. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=u_0$.
- Si $q\leqslant -1$ et $u_0\neq 0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Suites arithmétiques

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique s'il existe un $r\in\mathbb{R}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+r$

Méthodes

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on montre que la différence $u_{n+1}-u_n$ est constante (i.e indépendant de n).

Propriétés d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r on a alors :

- $\forall p,n\in\mathbb{N},\ u_n=u_p+(n-p)r$; $\quad u_n=u_0+nr$
- $u_0+u_1+\ldots u_n=\dfrac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$
- Si $r\neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=[\text{signe} r]\infty$.Si $r=0$, la suite est constante égale u_0.

Suites bornées

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée) ssi : $\exists m\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant m$ (respectivement $m\leqslant u_n$).
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Point méthode 1 :

Pour montrer qu'une suite est majorée ou minorée par a, on peut étudier le signe de la différence u_n-a.

Point méthode 2 :

Pour montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée, on peut procéder par manipulation d'inégalités.

Point méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite explicite (i.e $u_n=f(n)$), est majorée, minorée ou bornée, on peut s'appuyer sur les variations de la fonction associée (i.e la fonction f), c'est-à-dire :

- Si f est majorée sur $[0,+\infty[$ par M, alors la suite u l'est aussi.
- Si f est minorée sur $[0,+\infty[$ par m, alors la suite u l'est aussi.

Point méthode4 :

Pour montrer qu'une suite récurrente(i.e $u_{n+1}=f(u_n)$), est majorée, minorée ou bornée, on peut effectuer un raisonnement par récurrence.

Suites croissantes

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante) ssi : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n<u_{n+1}$).

Suites décroissantes

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) ssi : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n>u_{n+1}$).

Suites monotoness

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (resp. strictement monotone)ssi elle est croissante ou décroissante.
(resp. elle est strictement croissante ou strictement décroissante.)

Point méthode 1 :

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$.

Point méthode 2 :

Pour étudier le sens de variation d'une suite à termes strictement positifs ou strictement négatifs, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Point méthode 3 :

Pour étudier le sens de variation d'une suite explicite (i.e $u_n = f(n)$), on peut étudier les variations de la fonction associée f.

Point méthode 4 :

Pour étudier le sens de variation d'une suite récurrente
(i.e $u_{n+1} = f(u_n)$), on peut effectuer un raisonnement par récurrence en montrant que :
$\forall n\in\mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$ ou $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$, en s'appuyant sur les variations de la fonction associée f (pour que u soit monotone il faut que f soit croissante).

Suites convergentes :

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente s'il existe $l\in\mathbb{R}$ tel que ; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in\mathbb{R}$.

Suites divergentes :

On dit qu'une suite diverge si elle ne converge vers aucun réel (i.e elle peut tendre vers l'infinie, ou ne pas avoir de limite)

Théorème :

• Toute suite croissante majorée est convergente, si L est la limite de cette suite alors : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \leqslant L$.
• Toute suite décroissante minorée est convergente,
si L est la limite de cette suite alors : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \geq L$.

Conséquences :

• Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
• Une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Suites adjacentes :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathbb{R}$, on dit que les deux suites sont adjacentes ssi :

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, v_n \geqslant u_n \end{cases}$$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $L\in\mathbb{R}$ et on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \leqslant L \leqslant v_n$

Théorème de comparaison

Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\forall n\in\mathbb{N},\ v_n \geqslant 0\ )$

$$\begin{cases} \exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_n| \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que :

$$\begin{cases} \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, w_n \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers L.

Théorème de comparaison

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. S'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que :

• $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0, v_n \leqslant u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

• $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Propriétés d'une suite convergente :

• La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L si et seulement si la suite $(u_n - L)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
• Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors est bornée.
• Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend pas la valeur 0 et si la suite converge vers une limite non nulle L alors : la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{L}$.
• Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente (i.e $u_{n+1} = f(u_n)$) est convergente vers L et si f est continue en L alors $L = f(L)$.