Résumé de cours : Nombres complexes.

Forme algébrique d'un nombre complexe

✍ Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme (dite algébrique) : $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

✍ Le réel a est appelé partie réelle de z et est noté $\mathfrak{Re}(z)$. Le réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathfrak{Im}(z)$.

✍ z est réel $\Leftrightarrow b = 0$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow a = 0$.

✍ Le complexe 0 est à la fois réel et imaginaire pur.

Conjugué d'un nombre complexe

✍ On appelle conjugué du complexe $z = a+ib$, a et b réels, le complexe noté $\overline{z}$ et défini par : $\overline{z} = a - ib$.

✍ Les images de deux complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (appelé souvent axe des réels).

✍ $z+\overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$; $z-\overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z)$; $\overline{\overline{z}} = z$ et $z\overline{z} = x^2+y^2$, où $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

✍ $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

✍ Si $z = z' + iz''$ avec $z', z'' \in \mathbb{C}$ alors $\overline{z} = \overline{z'} - i\overline{z''}$

Module et arguments d'un nombre complexe non nul

✍ Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, et soit (r,θ) un couple de coordonnées polaires du point M dans $(O; \vec{u})$.

☞ le réel r est appelé module de z et noté $|z|$;

☞ le réel θ est appelé argument de z et noté $\arg(z)$. On a donc : $|z| = r = OM$; $\arg(z) \equiv (\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}})[2\pi]$.

✍ Le complexe 0 a pour module 0 mais n'a pas d'argument.

✍ Tout complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si θ est l'un d'eux, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

✍ Soit z un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ,
l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique de z.

✍ Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un complexe non nul.
Si $|z| = r$ et si $\arg(z) = \theta[2\pi]$ alors $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.

$r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\theta = \frac{a}{r}$; $\sin\theta = \frac{b}{r}$

Forme algébrique $z = a+ib, a, b \in \mathbb{R}$,	$\longrightarrow$ / $\longleftarrow$	Forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$

$a = r\cos\theta$; $b = r\sin\theta$

Formes exponentielle d'un nombre complexe non nul

Pour tout réel θ on pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Si z est un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ, on appelle forme exponentielle de z l' écriture : $z = re^{i\theta}$.

Remarques

Si ρ et θ sont des réels quelconques et si $z = \rho e^{i\theta}$, la forme exponentielle de z
n'est pas toujours $\rho e^{i\theta}$.

☞ si $\rho > 0$, la forme exponentielle de z est $\rho e^{i\theta}$;

☞ si $\rho < 0$, la forme exponentielle de z est $-\rho e^{i(\pi+\theta)}$;

☞ si $\rho = 0$, $z = 0$ et la forme exponentielle de z n'existe pas.

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel

on peut :

☞ montrer que sa partie imaginaire est nulle ;

☞ montrer qu'il est égal à son conjugué ;

☞ montrer qu'il est nul ou que son argument est $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Pour montrer qu'un nombre complexe est imaginaire pur

on peut :

- montrer que sa partie réelle est nulle ;
- montrer qu'il est égal à l'opposé de son conjugué ;
- montrer qu'il est nul ou que son argument est $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et pour tout entier naturel n : $[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Conséquences

- Pour écrire $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ sous la forme $\rho\ e^{i\alpha}$, avec $(\rho, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, on peut factoriser par $e^{i\frac{\theta}{2}}$:

$$e^{i\theta}+1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}; \quad e^{i\theta}-1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i(\frac{\theta}{2}+$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad -1 = e^{i\pi}; \qquad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Distances et angles orientés

- Soient A, B et C trois points distincts du plan
- $|z_B - z_A| = AB$; $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$
- Mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ est égale à : $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$
- Mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est égale à : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Conséquences

- A, B et C étant trois points distincts du plan :
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Théorème :

- L'équation $z^n = 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes deux à deux, appelées les racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité qui sont : $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Si on pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ alors on a : $z_{n-k} = \overline{z_k} = \frac{1}{z_k}$, $z_0 + z_1 + \ldots z_{n-1} = 0$ et $z_0 \times z_1 \times \ldots \times z_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Théorème :

- Soit $U = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$. L'équation $z^n = U$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes deux à deux, appelées les racine $n^{\text{ième}}$ de U qui sont : $e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Equation du second degré à coefficients complexes

- Soit (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation, il existe un δ tel que $\delta^2 = \Delta$ alors les solutions de (E) sont $z' = \frac{-b+\delta}{2a}$, $z'' = \frac{-b-\delta}{2a}$.
- $az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$.
- $z' + z'' = -\frac{b}{a}$; $z'z'' = \frac{c}{a}$.
- 1 est une solution de $(E) \Leftrightarrow a + b + c = 0$, -1 est une solution de $(E) \Leftrightarrow a - b + c = 0$
- Si a, b et c sont réels alors les solutions de (E) sont conjuguées.