Mr Hédi Ayache	Devoir de synthèse N°2	Durée : 4 H
4M	Épreuve : Mathématiques	Fév 2010

Exercice 1:

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction logarithme népérien notée ln.

a) Montrer que pour tout $t \in [x, x+1]$, on a : $\dfrac{1}{x+1} \leqslant f'(t) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

b) En déduire que pour $x > 0$, on a : $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 1 + \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant u_n$.

b) Déduire un encadrement de u_n puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$

3. a) Montrer que pour $t \geqslant 0$, on a : $1 - t \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$.

b) Déduire que pour $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

4. On pose $v_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

a) Montrer que $ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

b) Justifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2k^2} \leqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

c) Déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n - \dfrac{1}{2} u_n \leqslant \ln(v_{n+1}) \leqslant n$. montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(v_n)}{n} = 1$.

5. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

a) Montrer que $\ln(w_n) = \dfrac{\ln(v_n)}{n}$.

b) Déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Exercice 2:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit f la similitude indirecte qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -2i\bar{z} + 6$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Déterminer le rapport de f.

2. Montre que f admet un seul point invariant, on le note I. Calculer son affixe.

3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$. En déduire une équation de l'axe de f.

4. Caractériser $f \circ f$.

Exercice 3:

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$,
on considère l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation : $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(2\cos\theta,\sin\theta)$, ou θ est un réel de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. a) Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de $(\mathscr{E})$.

b) Tracer $(\mathscr{E})$ et placer ses foyers.

c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathscr{E})$.

2. Soit (T_M) la tangente à $(\mathscr{E})$ en M.
Montrer qu'une équation de (T_M) dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est : $x\cos\theta+2y\sin\theta-2=0$.

3. Soit $A(2,0)$ et $A(-2,0)$ les sommets principaux de $(\mathscr{E})$.(sommets du grand axe).
On désigne respectivement par (T) et $\left(T'\right)$ les tangentes à $(\mathscr{E})$ en A et A'. On désigne respectivement par P et P' les points d'intersections de (T_M) avec les tangents (T) et $\left(T'\right)$.

a) Donner les coordonnées des points P et P'.

b) Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{A'P'}=1$.

Exercice 4:

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$. On donne un carré $ABCD$ de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
S_1 est la similitude directe de centre C qui envoie D sur A.

1. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_1.

2. On note B' l'image du point B par S_1.

a) Montrer que $S_1\langle(DB)\rangle=(AB)$.

b) Montrer que la droite $\left(CB'\right)$ est tangente au cercle circonscrit au carré $ABCD$.

c) Construire alors le point B'.

3. S_2 est la similitude directe qui transforme O en A et A en B.

a) Déterminer et construire $B_1=S_2(C)$.

b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S_2.

c) En déduire que $S_2\circ S_1$ est une homothétie dont on déterminera le rapport.

4. Soit E le milieu du segment $[DC]$, la droite (AE) la droite (DB) en I. Montrer que les points C, I et B_1 sont alignés.

5. On note Ω le centre de S_2.

a) Montrer que Ω appartient au cercle passant par A et B et tangente à (AC).

b) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OB]$. Construire alors Ω.