Mr Hédi Ayache	**Devoir de synthèse N°1**	**Durée : 3 H**
4M	**Épreuve : Mathématiques**	**8 Déc 2009**

Exercice 1:

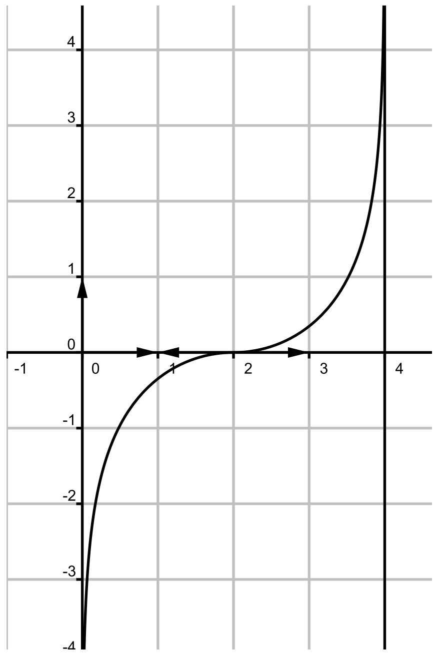
Soit dans $\mathbb{C}$ les équations $(E) : z^2 - 2z + 2 = 0.$; $(E') : z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0.$

1. Résoudre l'équation (E).

2. Résoudre l'équation (E') sachant qu'elle admet deux solutions complexes conjuguées.

Exercice 2:

On donne ci-contre la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ d'une fonction f dérivable sur son domaine de définition.



1. a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déduire que f est une bijection.

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

2. a) Tracer la courbe $\left(\mathscr{C}_{f^{-1}}\right)$ de la fonction f^{-1}.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^{-1}(x) - 2}{x}$. Justifier.

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur son domaine de définition.

Exercice 3:

Soit ABC un triangle direct et A' le milieu du segment $[BC]$.

Soient P et Q les deux points définis par : $\begin{cases} PA = PC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} QB = QA \\ \left(\widehat{\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QA}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

On désigne par Ω le milieu du segment $[PQ]$, I le milieu du segment $[QA']$, J le milieu du segment $[PA']$ et P' le symétrique de P par rapport à A'.

On désigne par R_P et R_Q les rotations d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre respectifs P et Q.

On pose $f = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P$.

1. a) Déterminer $f(A)$. Caractériser alors f.

b) Montrer que $R_Q(P') = P$.

2. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A') = Q$ et $\varphi(P) = A'$.

b) Caractériser φ.

c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h = \varphi \circ S_{(A'Q)}$.

3. Soit ψ l'antidéplacement qui envoie A' sur Q et P sur A'.

a) Montrer que $\psi(J) = I$.

b) Montrer que ψ est une symétrie glissante.

c) Déterminer les éléments caractéristiques de ψ.

4. Soit M un point du plan. On pose $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$. Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on déterminera.

<u>Exercice 4:</u>

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2+nu_n} \end{cases}$.

1. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - \dfrac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{2n+1}$.

b) Déduire que u est une suite convergente et calculer sa limite.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-u_n) = \dfrac{1}{2}$.

2. Soit v la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a) En utilisant un encadrement de u_{n+1}, montrer que u est une suite croissante.

b) Déduire u et v sont deux suites adjacentes.

3. Pour $n \in N^*$, on définit la suite (S_n), par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (1-u_k)(v_k - 1)$.

a) Montrer que (S_n) est une suite croissante.

b) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{2k(2k+1)} \leqslant (1-u_k)(v_k-1) \leqslant \dfrac{1}{2k(2k-1)}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant S_n \leqslant \dfrac{1}{4}\left(3 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Déduire que (S_n) est une suite convergente et donner un encadrement de sa limite.