

Mr Hédi Ayache	Devoir de synthèse N°1	Durée : 3 H
3Sc	Épreuve : Mathématiques	Déc 2009

Exercice 1:

Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = ax + b & \text{si } |x| < 1 \\ f(x) = x|x| & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} .$$

- Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
- a) Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1 et en -1 .
b) Pour les valeurs de a et b , trouvées dans la question précédente, montrer que f est une fonction impaire.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$.

- Justifier que f est continue sur \mathbb{R} .
- a) A l'aide d'une calculatrice, calculer $f(-0,7)$, $f(-0,8)$, $f(-0,1)$, $f(-0,2)$, $f(0,9)$ et $f(1)$.
b) Dédire que f s'annule exactement trois fois. On note a , b et c les solutions de l'équation (E) : $f(x) = 0$ avec $a < b < c$.
- a) Montrer que $\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$.
b) Dédire que $f(\cos t) = \frac{1}{4} \left(\cos^3 t - \frac{1}{2} \right)$.
c) Calculer $f\left(\cos \frac{\pi}{9}\right)$, $f\left(-\cos \frac{2\pi}{9}\right)$ et $f\left(-\cos \frac{4\pi}{9}\right)$ puis déduire que $a = -\cos \frac{2\pi}{9}$, $b = -\cos \frac{4\pi}{9}$ et $c = \cos \frac{\pi}{9}$.
- a) Calculer $f(0)$.
b) En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \left(x - \cos \frac{\pi}{9}\right) \left(x + \cos \frac{2\pi}{9}\right) \left(x + \cos \frac{4\pi}{9}\right)$.
Montrer que $\cos \frac{\pi}{9} \times \cos \frac{2\pi}{9} \times \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$.

Exercice 3:

- Soit $A = \cos \frac{2\pi}{15} + \tan \frac{\pi}{15} \times \sin \frac{2\pi}{15}$. Calculer A . Justifier l'égalité trouvée.
- Soit $B = \cos \frac{\pi}{15} \times \cos \frac{2\pi}{15} \times \cos \frac{4\pi}{15} \times \cos \frac{8\pi}{15}$.
a) Montrer que $16 \sin \frac{\pi}{15} \times B = \sin \frac{16\pi}{15}$.
b) Dédire la valeur exacte de B .

A compléter et à remettre avec la copie

Nom :
Prénom :

Exercice 4:

Cocher la réponse exacte (pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.)

1. f est une fonction paire, on suppose que $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3$ alors :

$\lim_{x \rightarrow (-2^-)} f(x) = -3$

$\lim_{x \rightarrow (-2^-)} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow (-2^+)} f(x) = 3.$

2. f est une fonction continue sur $[1,2]$, on suppose que $f(1) = 3$ et $f(2) = 5$.

Soient les équations $(E) : f(x) = 4$ et $(E') : f(x) = 2$ alors :

(E) admet deux solutions dans $[1,2]$

(E) admet au moins solution dans $[1,2]$

(E') admet au moins solution dans $[1,2]$.

3. $A = \frac{\cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{8\pi}{9}}{\cos \frac{10\pi}{9}}$ alors :

$A = 2$

$A = -2$

$A = -1.$