

Lycée Bechri
 A.S: 2010/2011
 Prof: Lahmadi.A
 Niveau: 4^{ème} M
 Date: Le 11/11/2010
 Durée: 2H

Devoir de contrôle N°1

Exercice N°1 (3 points)

Donner la bonne réponse

❶ On considère le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]\pi, 2\pi[$

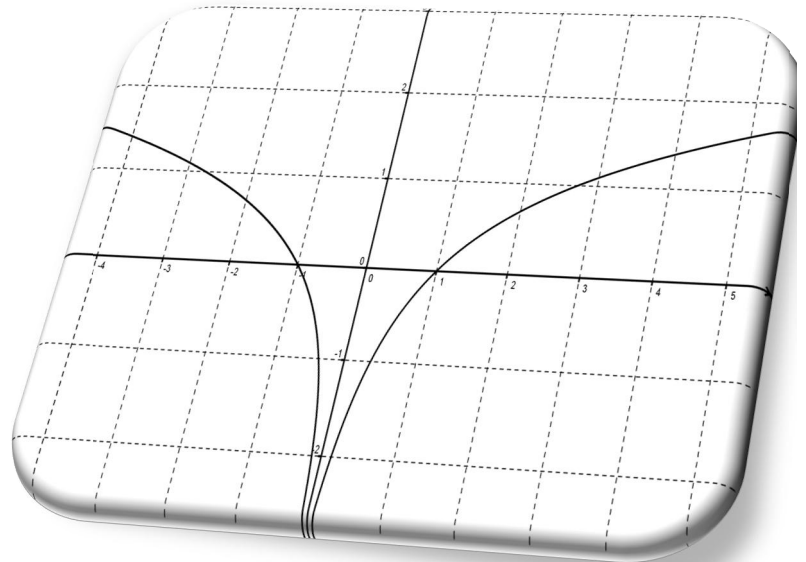
Un argument de z est :

- a) θ b) $\frac{\theta}{2}$ c) $\frac{\theta}{2} + \pi$

❷ La figure ci – contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^* et telle que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe Cf.

L'ensemble de définition de $f \circ f$ est:

- a) \mathbb{R}^*
 b) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
 c) $\mathbb{R} - \{-1; 0, 1\}$



❸ Soit f une fonction dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	5	-2

L'équation $f(x) = 0$

- a) n'admet aucune solution b) admet exactement deux solutions
 b) admet exactement trois solutions

Exercice N°2 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et -1 . Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. Soit M un point du plan complexe privé de O d'affixe $z = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

- ❶ Calculer le module de $(z - 1)$. En déduire que M appartient au cercle (C).
- ❷ Montrer que, pour tout réel θ de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $z = 2 \cos \theta \cdot e^{i\theta}$
- ❸ Soit M' le point d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2 \cos \theta} e^{i(\pi + \theta)}$
 - a) Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
 - b) Prouver que $|z' + 1| = |z'|$ puis on déduit que M' décrit une droite (D) que l'on déterminera.

Exercice N°3 (7 points)

On considère la suite réelle U définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = a & ; \quad a \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = \frac{1}{1 + 2U_n} & ; \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- ❶ Déterminer les valeurs de a pour lesquelles U est constante.
Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que a = 1
- ❷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.
- ❸ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$
 - a) Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$
 - b) Montrer par récurrence que la suite V est décroissante.
 - c) Montrer par récurrence que la suite V est minorée par $\frac{1}{2}$
 - d) En déduire que la suite V est convergente. (On admet qu'elle converge vers $\frac{1}{2}$).
- ❹ En remarquant que $W_n = f(V_n)$, montrer que W converge vers une limite que l'on déterminera.
- ❺ Que peut-on déduire pour la suite U ?

Exercice N°4 (4 points)

ABCD est un carré direct, $(\widehat{ABC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Δ est la médiatrice de [BC]

Soit f une isométrie distincte de la symétrie S_Δ et telle que $f(B) = C$ et $f(D) = A$

- ❶ a) Montrer que le point $O = B * D$ est invariant par f et que c'est l'unique point invariant par f.
b) En déduire la nature et les caractéristiques de f.
- ❷ Soit $g = f \circ S_\Delta$ et $\varphi = S_\Delta \circ f$
 - a) Chercher $g(A)$ et $g(C)$. En déduire que $g = S_{(AC)}$
 - b) Montrer que $\varphi = S_{(BD)}$
 - c) En déduire la nature de $g \circ \varphi$