Lycée 15 Novembre Sfax B.Mahfoudh Riadh	Devoir de synthèse N° 1 Durée : 2H	Classe : 4ème Sciences 1 06 – 12 - 2010

Exercice 1

I) Répondre par Vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes. Aucune justification n 'est demandée.

1) Toute suite croissante et bornée est convergente.

2) La suite (Un) définie sur N par $U_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ n'admet pas de limite.

3) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

II) Soit la suite u_n définie sur ¥ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases}$ pour tout entier n .

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$

2) a) Montrer que (U_n) est croissante

b) En déduire que la suite (U_n) est convergent et préciser sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie sur ¥ par $V_n = \frac{1+U_n}{1-U_n}$

a) Montrer que pour tout n on a : $V_{n+1} = V_n^2$

b) En déduire que tout n∈ ¥ on a : V_n = 3

c) Exprimer alors U_n en fonction de n et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 2

le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct$(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit α un réel de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et l'équation (E) : $z^2 - (1+2\cos\alpha)z + 1 + e^{-i\alpha} = 0$

a) Vérifier que $z' = e^{-i\alpha}$ est une solution de (E) .

b) En déduire l'autre solution

2) Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = e^{-i\alpha}$ et $z_B = 1 + e^{i\alpha}$.

a) Donner la forme exponentielle de z_B et puis de $\frac{z_B}{z_A}$.

b) Déterminer α pour que le triangle OAB Soit rectangle en O.

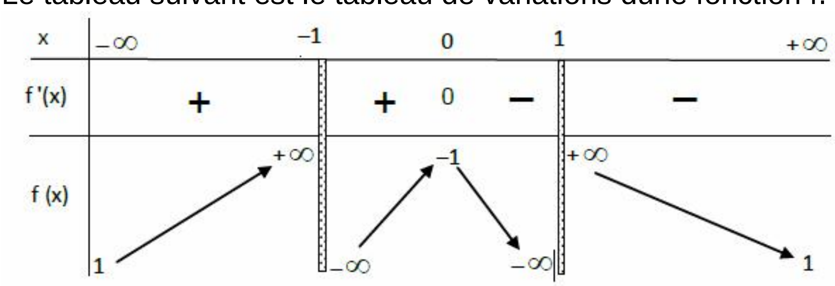
3) Soit C le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses .

a) Déterminer l'affixe du point D pour que ACBD soit un rectangle.

b) Déterminer α pour que ACBD soit un carré.

Exercice 3

Le tableau suivant est le tableau de variations dune fonction f.



On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A

1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Donner les équations des asymptotes de (C).
3) Quel est le nombre de solutions de l'équation f(x) = 3 ?
4) Comparer, en justifiant, f(2) et f(3).
5) Ecrire une équation de la tangente à (C) au point A(0; -1).

PartieB

Dans cette partie, on admet que pour tout x de $\mathbb{R}-\{-1,1\}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2+bx}$

1) En utilisant le tableau de variations de f, montrer que a = 1 et b = - 1.
2) Soit g la restriction de à l'intervalle $]1,+\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur I $=\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ par : $f(x)=1+3\cos^2 x$

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de I sur $[1,4]$.

2) a) Vérifier que $f^{-1}\left(\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ et en déduire $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{7}{4}\right)$

   b) Tracer dans un même repère orthonormé la courbe C de f et la courbe C' de f^{-1}

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,4[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{(4-x)(x-1)}}$

4) a) Montrer que pour tout x $\in\left[\dfrac{7}{4},\dfrac{13}{4}\right]$ on a : $\dfrac{2}{9}\le f^{-1}(x)\le\dfrac{2}{3}$

   b) Montrer que l'équation $f^{-1}(x)=x$ admet dans l'intervalle $\left[\dfrac{7}{4},\dfrac{13}{4}\right]$ une solution unique α.

   c) Montrer que si $\alpha\le x\le\dfrac{13}{4}$ alors $\dfrac{1}{9}(2x+7\alpha)\le f^{-1}(x)\le\dfrac{1}{3}(2x+\alpha)$.