Série N°3 : Nombres complexes (sujet du baccalauréat)

4eme MATH

Mr : EL Hattay Mohamed

Exercice N°1 (session de contrôle juin 1994)

1) **Soit φ un réel de $[-\pi;\pi]$ et le nombre complexe défini par :**
$z=\frac{1}{2}\ [\sin\varphi+i(1-\cos\varphi)]$. Déterminer, en fonction de φ, le module et un argument de z.

2) Dans cette question, φ un réel de l'intervalle $[0;\pi[$ .Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivantes : $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$.

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points M et N d'affixes

respectives $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$. Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle $]0;\pi[$. Représenter ces ensembles.

Exercice N°2(session juin 2000)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^3+2(1-i)z^2+(1+m^2-4i)z-2i(1+m^2)=0$$

Où m est un paramètre réel.

1) a. Montrer que l'équation (E) admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b. calculer en fonction de m les deux autres racines.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B, M' et M'' d'affixes respectives 2i,-2-2i ,-1-im et -1+im

a. Montrer que AM'BM'' est un parallélogramme.
b. Déterminer m pour que AM'BM'' soit un rectangle.

Exercice N°3(session juin 2001)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{U},\vec{V})$ on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où a est un nombre complexe donné différent de 1.

Soit f l'application de P\ {B} dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z ' telle que : $z' = \frac{z-a}{z-1}$ **.**

1) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation.

$$(E) : z^2 - 2z + a = 0$$

2)a)On suppose que $a = 1 + e^{i\theta}$ **où** $\theta \in \left] \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right[$**. Résoudre l'équation** (E).

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E.

3) Dans cette question on suppose que $a = -1$

Soit M un point de P\ {B} d'affixe z et M' le pont d'affixe z ' = f(z)

a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{BM'}}\right) \equiv 0\ (2\pi)$

En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}}\right)$

b) Montrer que z ' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$ **.**

c)En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

<u>Exercice N°4(session juin 2003)</u>

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$$(E_d) : z^3 + (3 - d^2)z + 2i\,(1 + d^2) = 0$$

Où d est un nombre complexe donné de module 2.

1)a-Vérifier que 2i est une solution de (E_d).

b-Résoudre alors l'équation de (E_d).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{U}, \vec{V})$ **on considère les points A , B, M, N d'affixes respectives 2i ;**$-i; -i + d; -i - d$ **.**

a) Calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$.

b)En déduire que lorsque d varie , les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c)Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles les triangles AMN est isocèle de sommet principal A.

Exercice N°5(session de contrôle juin 2003)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E):\ z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i=0$$

1) a-Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b-Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

c-Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Soit θ un réel et E_θ l'équation :

$$(E_\theta):\ z^3-2e^{i\theta}(\sqrt{3}+i)z^2+4e^{2i\theta}(1+i\sqrt{3})z-8ie^{3i\theta}=0$$

a)Démontrer que $(z\,e^{-i\theta})$ est solution de (E) si et seulement si z est solution de E_θ

b) En déduire les solutions de l'équation (E_π) suivante :

$$z^3+2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z+8i=0$$

3) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$ les images des solutions des équations (E) et (E_π) et vérifier qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier.

Exercice N°6(session juin 2004)

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2-2z+1+a^2=0$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E .

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1+ia et 1-ia. On pose $a=a_1+ia_2$; a_1 et a_2 réels.

a-Montrer que les points O,A et B sont alignés si et seulement si $a_1=0$.

b-Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a|=1$.

3)On suppose que $a=e^{i\alpha}$ où $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

a-Vérifier que pour tout réel x , on a

$$1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ e^{i\frac{x}{2}}$$
$$1 - e^{ix} = -2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ e^{i\frac{x}{2}}$$

b-En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes 1+ia et 1-ia.

c-Déterminer a pour que les points O,A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice N°7(session juin 2006)

$\theta \in [0; 2\pi[$ **; on pose pour tout nombre complexe z**

$f_\theta(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1 + i)(-1 + e^{i\theta})$

1)a-Vérifier que $f_\theta(1 + i) = 0$

b-En déduire les solutions $z'\ et\ z"\ \ dans\ \mathbb{C}$ **de l'équation** $f_\theta(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe , rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$**, on considère les points A,B et M d'affixes respectives** $-1, i\sqrt{3}\ \ et - 1 + e^{i\theta}$.

a) Montrer que lorsque $\theta\ varie\ dans\ [0; 2\pi[$**, M varie sur un cercle** $(\mathcal{C})$ **de centre A dont on précisera le rayon.**

b- Déterminer les valeurs de θ **pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle** $(\mathcal{C})$.

Exercice N°8(session juin 2007)

1)$Soit\ \theta\ un\ réel\ de\ l'intervalle\ ]0; \pi[$**. Résoudre l'équation :** $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$**, on considère les points A, M et N d'affixes respectives** $-1 + i\ , i + e^{i\theta}\ et\ i - e^{i\theta}$ **où**
$\theta\ un\ réel\ de\ l'intervalle\ ]0; \pi[$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ \ et\ \ \overrightarrow{AN}$ **sont orthogonaux.**

b) Montrer que lorsque $\theta\ varie\ dans\ ]0; \pi[$ **les points M et N varient sur un cercle** $\mathcal{C}$ **que l'on déterminera.**

3) a-Déterminer en fonction de θ **l'aire** $\mathcal{A}(\theta)$ **du triangle AMN.**

b-Déterminer la valeur de θ **pour laquelle l'aire** $\mathcal{A}(\theta)$ **est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle** $\mathcal{C}$.

Exercice N°9(session juin 2008)

1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+(6+5i)z+2+16i=0$.

2)soit $f(z)=z^3+2(3+2i)z^2+(7+10i)z+16-2i$.

a-Déterminer le nombre complexe α tel que , pour tout nombre complexe z on a :

$$f(z)=(z-\alpha)(z^2+(6+5i)z+2+16i).$$

b-Résoudre alors l'équation $f(z)=0$.

3)Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=i$; $z_B=-4-2i$ et $z_C=-2-3i$ et on désigne par z_I l'affixe du point I milieu de [AC].

a-Représenter les points A,B,C et I.

b-Montrer que le triangle ABC est rectangle.

4)a-construire les points D et E tels que BAD et BEC soient des traingles directs recangles et isocèles en B. Soient z_D et z_E les affixes respectives de D et E.

b-sans calculer z_D et z_E ,trouver le module et un argument de $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}$ et en déduire que :

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\frac{z_B-z_E}{z_C-z_B}=i.$$

C-Montrer que $\frac{z_D-z_E}{2(z_I-z_B)}=i$.

d-En déduire que DE= 2BI et $(DE)\perp(BI)$

Exercice N°10(session juin 2010)

le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$. On note A le point d'affixe -2. On considère l'équation (E) : $3z^3-2z^2+4z+16=0$.

Soit $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et M ,N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha\in\mathbb{R}^*$ alors les points M , N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E) .

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a)Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2} \quad \alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$ les points A,M,N et P.

b)Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4)a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\overline{\alpha}$ est une solution de (E) .

b)En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice N°11(session juin 2011)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1)a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose z = x+iy où x et y sont des réels . Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c)En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA], privé des points O et A.

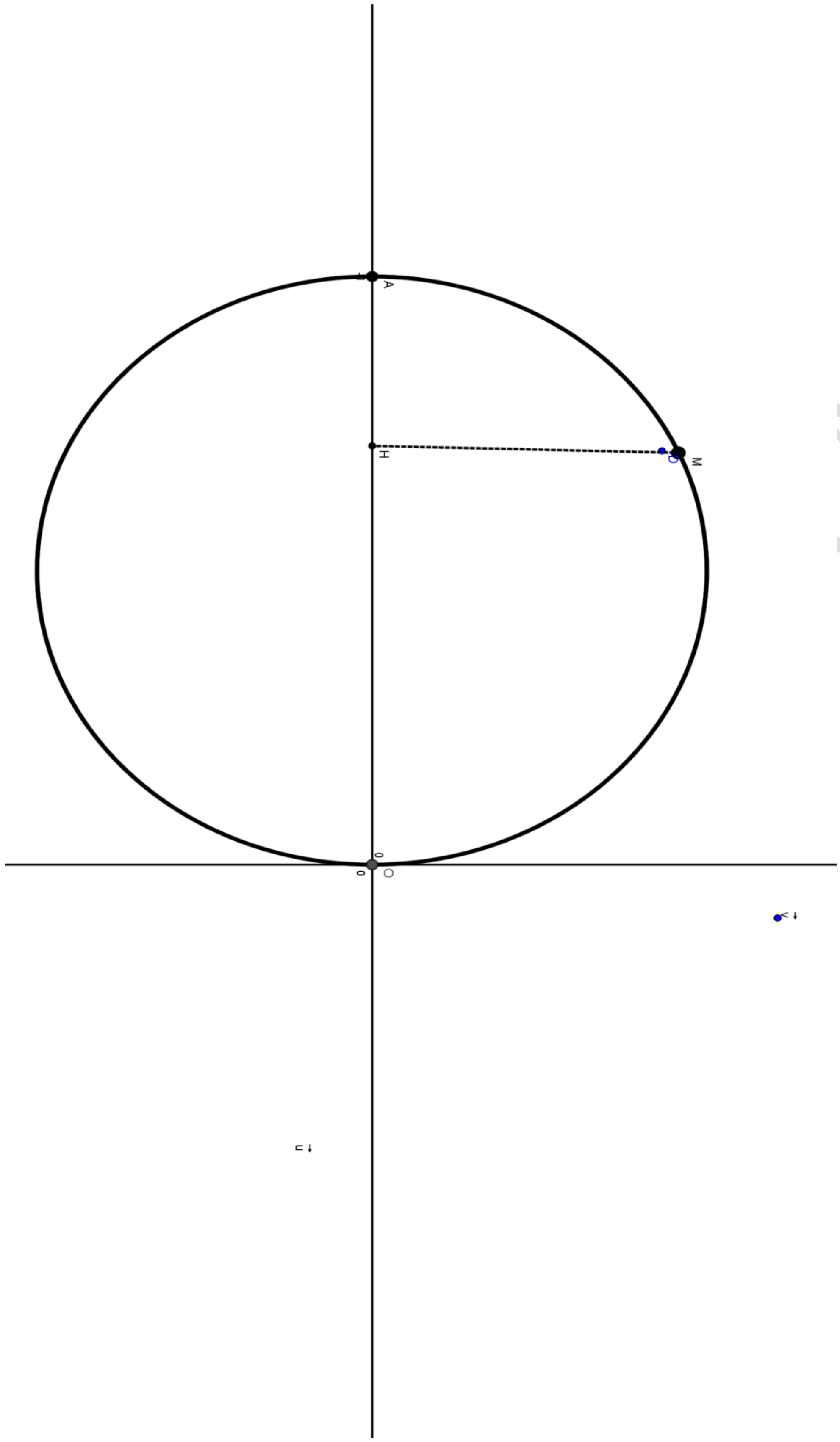
2)Dans le figure ci-dessous , on a tracé le cercle (Γ) et on placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{U})$.

On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{U}, \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.


A
H
M
O
u
v