Exercice N°1 On considère les nombres complexes :

$$z_1 = 1 - i, z_2 = 1 - i\sqrt{3}\ , et\ z = \frac{z_1^5}{z_2^4}$$

1) Calculer le module et un argument de z_1, z_2 et z.
2) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
3) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice N°2 : Soit $z = e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

1) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$$\overline{z}\ , 1 + z\ , 1 - z\ et\ z\ ' = \frac{(1-z)^2}{\overline{z}(1+z)}$$

2) Calculer la valeur de θ pour laquelle $z\ '$ est réel.

Exercice N°3 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tel que les points images des nombres complexes 1, Z et $1 + z^2$ soient alignés.

Exercice N°4 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tel que l'on ait $z\,\overline{z} + 3(z + \overline{z}) = 7$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice N°5 : soit z un nombre complexe et M le point image de z dans le plan complexe.

On pose $Z = \frac{z-2}{z+1}$

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que Z soit réel.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur.

Exercice N°6 : Montrer que si $|z| = 1$, $z \neq 1$ alors $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

Exercice N°7 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(3 + i)z = 1 - 2i$ 2) $\frac{(2+i)z+1-i}{(1-i)z+3i} = 1 + i$ 3) $(3 - i)\overline{z} = \frac{1+i}{1-i}$

4) $z + 2\overline{z} = 3 + 2i$ 5) $(1 + i)z + (3 - i)\overline{z} = -2i$ 6) $z^2 - \overline{z} + 2 = 0$.

Exercice N°8 : soit α un réel tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes :

$$z_1 = 1 + i\tan\alpha \quad z_2 = 1 - i\tan\alpha \quad z_3 = -1 - i\tan\alpha$$

$$z_4 = -1 + i\tan\alpha \quad z_5 = \mathrm{i} + \tan\alpha \quad z_6 = \frac{1}{1 + i\tan\alpha}$$

$$z_7 = \frac{1}{1 - i\tan\alpha} \quad z_8 = \frac{1}{i + \tan\alpha}$$

Exercice N°9 : soit le nombre complexe $\mathrm{Z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{-i\theta}}$ où $\theta \in]0; 2\pi[$

1) Montrer que $\mathrm{Z} = \mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}$
2) Déterminer suivant les valeurs de θ le module et un argument de Z.

Exercice N°10 : On considère le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi[$

1) Mettre z sous forme exponentielle. 2) Calculer z^4
   a) à partir de l'écriture $z = 1 + e^{i\theta}$
   b) à partir de la forme exponentielle.
2) En déduire la relation $\cos^4\frac{\theta}{2} = \frac{1}{8}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{3}{8}$

Exercice N°11 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère trois points A, B et C distincts deux à deux d'affixes respectives a, b et c. On suppose que a ,b et c vérifient la relation $a + bj + cj^2 = 0$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) vérifier que $1 + j + j^2 = 0$
2) Montrer que $a - c = j(c - b)$
3) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice N°12 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère trois points A, B et C distincts deux à deux d'affixes respectives a, b et c.

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si

$\frac{c-a}{b-a} \in \{\pm i\}$

2)On donne le point A(1+2i) et la droite Δ $d'\acute{e}quation\ y = 1$

Déterminer et tracer tous les triangles ABC rectangles isocèles en A et tels que $B \in \Delta$ et C appartient à l'axe des réels.