Série N°5 : Suites réelles

4éme Math **MR : EL Hattay Mohamed**

4éme Math MR : EL Hattay Mohamed

<u>Exercice N°1</u> **Soit (v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout naturel n,**

$$v_n = \frac{v_n}{1+v_n}.$$

a)Montrer que pour tout n, $v_n > 0$.

b) prouvez que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{v_n}$ est arithmétique.

c)Calculer $\lim\limits_{+\infty} v_n$

<u>Exercice N°2</u> **on considère la suite (u_n) définie par :** $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1},\ n \geq 1 \end{cases}$

1°) Trouvez deux nombres réels a et b tels que :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 1 \end{cases}$$

2°)On note (v_n) est la suite définie par : $v_n = u_{n+1} - au_n$.

Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison b.

3°) On note (w_n) est la suite définie par : $w_n = u_{n+1} - bu_n$.

Démontrez que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison a.

4°) Exprimer explicitement v_n et w_n en fonction de n, puis déduisez –en l'expression explicite de u_n en fonction de n .

<u>Exercice N°3</u> **θ est un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2\cos\theta$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$**

1°) Calculez u_1 et u_2.

2°) Démontrez par récurrence que $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3°) Calculer $\lim\limits_{+\infty} U_n$.

<u>Exercice N°4</u> **Soit (u_n) définie par : $u_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{n+k}$**

1°) Montrer que pour tout entier non nul $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$

En déduire que (u_n) est une suite croissante.

2°) Montrer que pour tout entier non nul : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$

En déduire que (u_n) est une suite majorée.

3°) Montrer que (u_n) est une suite convergente. Donner un encadrement de sa limite.

Exercice N°5 Dans chacun des cas, étudiez la limite de la suite (u_n) en précisant les théorèmes utilisés.

a) $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ b) $u_n = \frac{n \sin n}{1+n^2}$ c) $u_n = \frac{2n+\cos n}{5n+\sin n}$

$d)$ $u_n = n(2+\cos n)$.

Exercice N°6 Dans chacun des cas, les deux suites sont –elles adjacentes ?

a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$

b) $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ Et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

Exercice N°7 a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout entier n :

$u_{n+1} = \sqrt{v_n u_n}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n + u_n}{2}$.

1°) Prouvez que, pour tout n u_n et v_n sont strictement positifs.

2°) Prouvez que, pour tout n , $u_n \leq v_n$.

3°)a)Démontrez que, pour tout n , $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\ (v_n - u_n)$.

c) Déduisez –en que $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(b-a)$.

4°) Prouvez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

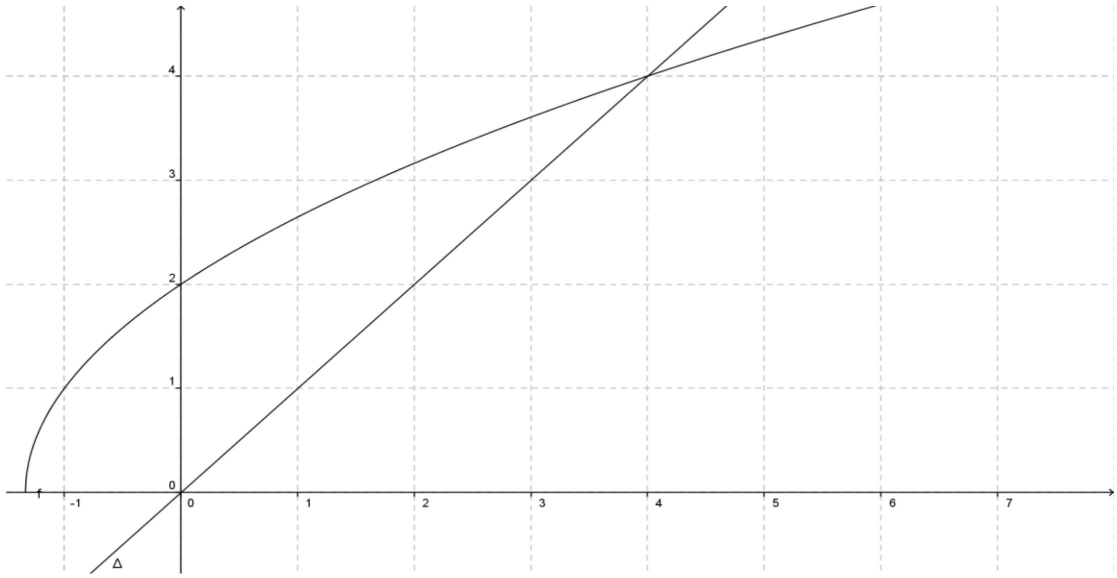
5°) On suppose ici que a= 2 et b=5. Déterminer une valeur approchée de la limite commune ℓ des suites (u_n) et (v_n) à 10^{-3} prés.

Exercice N°8 : (u_n) est la suite définie par $u_0 > -\frac{4}{3}$ et pour tout n

$u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie par

$f(x)=\sqrt{4+3x}$ et la droite Δ d'équation y=x .



1°) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ.

2°) On suppose que $u_0 = 6$

a)placer sur l'axe des abscisse u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 et u_5

b) Démontrez que la suite (u_n) est minorée.

c) Etudiez les variations de la suite (u_n).

d) Déduisez en que la suite (u_n) est convergente et calculez sa limite.

<u>3°)</u> la suite (u_n) est-elle convergente si $0 < u_0 < 4$.

- **<u>Exercice N°9:</u>**

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 1$ *et pour tout n*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n}$$

1°)a)Montrer que pour tout n , $u_n > 0$.

b) Montrer que (u_n) est une suite croissante.

2°)a)Montrer que pour tout n $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$.

b)En déduire que pour tout n , $u_n \geq \mathrm{n} + \frac{1}{2}$.

3°) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{U}_n$.