Mr : EL Hattay Mohamed

Exercice N°1 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}$

4) Soit deux entiers naturels non nuls n et k. Cherchez la limite de :

$$f(x) = \frac{n\,x^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{x^k-1}, pour\ x \neq 1,$$ quand $x \to 1$

5) Soit un réel non nul. Etudiez, suivant le signe de m, la limite de

$$\frac{m-\sqrt{m^2-x^2}}{x}\ \ au\ point\ x = 0.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{1+x^2}$

7) a) soit $f(x) = 2x - E(x)$. Etudier la limite de f en 1.

b) soit $h(x) = (x-1)E(x)$. Etudier la limite de h en 1.

Exercice N°2 : 1) Soit $f(x) = \dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$. Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$,

$\dfrac{x-1}{3} \leq f(x) \leq x+1$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2) soit $h(x) = \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)E\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$

a) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x-1 < E(x) \leq x$.

b) Montrer que h admet une limite finie en 0 que l'on calculera.

Exercice N°3 : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+a+\sqrt{1+x+x^2} & si\ x \leq 0 \\ x\ \sin(\pi x) & si\ 0 < x \leq 1 \\ bx - \dfrac{x-1}{-2+\sqrt{x^2+3}} & si\ x > 1 \end{cases}$$ o ù a et b désignent deux réels.

1) Calculer a et b pour que f soit continue en 0 et 1 .
2) Dans la suite on prend $a = -1$ et $b = 2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Exercice N°4 : Soit $f(x) = \sqrt{1-\cos(4x)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) Etudier la continuité de f sur D .
3) Déterminer la limite en 0 de la fonction $h(x) = \dfrac{\sin 3x}{f(x)}$

Exercice N°5 : Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{\pi-2x}$ définie sur D= $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2}\right\}$

a) f est-elle continue sur D ? b) Prolonger f par continuité pour x = $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice N°6 :

Montrer que les courbes représentatives (C_1) , (C_2) et (C_3) respectivement des fonctions suivantes admettent une même asymptote verticale.

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}\ ; f_2(x) = \frac{x+3}{3x^2+x-2}\ f_1(x) = \frac{1}{\sin(\pi x)}; x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$$

Exercice N°7 : on nomme partie entière de x , et l'on désigne par $E(x)$, le plus grand entier au plus égal à x . On pose $R(x) = x - E(x)$.

1) Tracer les courbes représentatives des fonctions E et R .
2) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F , définie par F(x) = $f \circ R(x)$.
   a) A quelle condition la fonction f doit-elle satisfaire pour que la fonction F soit continue ?
   b) A quelle condition la fonction f doit-elle satisfaire pour que la fonction F soient identiques ?

3) On pose : $g(x) = 1 - |2x-1|$; $G(x) = g \circ R(x); H(x) = E(x).G(x)$

Tracer les courbes représentatives de ces fonctions.

Ces fonctions sont-elles continues ?

Exercice N°8 : Soit f une fonction définie sur $[0;\pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ \dfrac{x - \dfrac{x^2}{2\pi}}{\sin\dfrac{x}{2}}, & x \in]0;\pi] \end{cases}$$

1) Montrez que f est continue sur $]0;\pi]$

2) **Déduisez-en l'existence d'un réel M tel que, pour tout x de $[0;\pi]$:**

$$0 \leq f(x) \leq M.$$

<u>Exercice N°9 :</u> Soit f une fonction définie sur $[0;2]$ par : $f(x) = x^3 + x - 5$.

1) **Montrer qu'elle est strictement croissante.**
2) **Montrer que l'équation $x^3 + x - 5 = 0$ admet une racine comprise entre 0 et 1 .**

<u>Exercice N°10 :</u> soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;\pi]$. On pose :

$$f_n(t) = \begin{cases} n, & si\ t = 0 \\ \dfrac{\sin\frac{nt}{2}\,.\cos\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}, & si\ t \in \left]0;\pi\right] \end{cases}$$

f_n est-elle continue sur $[0;\pi]$.

<u>Exercice N°11 :</u> soit f une fonction continue sur $[a;b]$. k et ℓ deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$k\,f(a) + \ell\,f(b) = (k + \ell)f(c).$$

<u>Exercice N°12 :</u> soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que pour tout x de $[0;1]$;

$0 \leq f(x) \leq 1$. Montrer qu'il existe au moins un point c de $[0;1]$ tel que $f(c)=c$.

<u>Exercice N°13 : 1)</u> Montrer que l'équation $8x^3 + 6x - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$.

3) **soit la fonction $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - x - 1$.**
   a) **Dresser le tableau de variation de f.**
   b) **Montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\,\alpha\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - 1$ et que $-\frac{11}{8} < f(\alpha) < -1$.**
4) **a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < \alpha < x_2$.**
   c) **Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel.**