Exercice :1 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$,montrer l'équivalence :

$$|a-b| = |1-\bar{a}b| \Leftrightarrow |a| = 1 \ \ ou \ \ |b| = 1$$

Exercice :2 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = 1+3i$, $z_B = 4+i$ et $z_C = 1+xi$ avec x est un réel.

a)Trouver x pour que le triangle ABC soit rectangle en C .

b) Trouver x pour que le triangle ABC soit isocèle en C .

Exercice :3 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. On note a , b et c les affixes respectives des points A , B et C. Soit h l'affixe du point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1) Montrer que $\overline{(h-a)}(c-b)$ et $\overline{(h-b)}(c-a)$ sont imaginaires pur.

2) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice :4 Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

on donne l'application : $f : P \setminus (O,\vec{v}) \longrightarrow P$

$$M(z) \longmapsto M'(z') \ / \ z' = \frac{z(z-\bar{z})}{z(z+\bar{z})}$$

1)a) Montrer que f n'a aucun point invariant.

b) Donner l'image de l'axe des abscisses privé du point O par f .

2) Soit M un point de $P \setminus \{(O,\vec{u}) \cup (O,\vec{v})\}$.

a) Montrer que la droite (MM') à une direction fixe que l'on précisera.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux.

c) Donner une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

Exercice :5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

1) Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

2) Démontrer que : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$. On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

On désigne par (C) le cercle de centre A contenant le point O et par (C^*) le cercle (C) privé du point O.

3) On suppose dans cette question que le point M appartient à (C^*).

a) Justifier l'égalité : $|z-1| = 1$.

b) Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

c) Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M.

4) Le point M étant un point du plan , d'affixe z non réelle , on nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

a) Calculer $\frac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de z. Exprimer alors l'argument de $\frac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}\right)$.

b) Comparer les angles $\left(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}\right)$ et $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

c) Démontrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle AMB.

Exercice :6

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.Soit le point A d'affixe a .

1) Déterminer et représenter l'ensemble E des points A tels que : $|a| = |a-1|$.

2) Montrer que si A est un point de E alors : $a - 1 = -\bar{a}$.

En déduire que : $\arg(a) + \arg(a-1) \equiv \pi \quad [2\pi]$

Exercice :7

Soit $t \in]0 \ , \ \pi[$.

Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1 + \cos(t) + i\sin(t)$; $Z_2 = 1 + \cos(t) - i\sin(t)$; $Z_3 = -1 + \cos(t) + i\sin(t)$

$Z_4 = -1 + i\cos(t) + \sin(t)$; $Z_5 = (\cos(t) + i\sin(t))^2 - 1$; $Z_6 = \frac{1+\cos(t)+ i\sin(t)}{-1+\cos(t)+ i\sin(t)}$

Exercice :8

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M et N les points d'affixes respectives : $z = 1 + e^{i2\theta}$ et $u = \cos(2\theta) + i(1 - \sin(2\theta))$

avec $\theta \in \left[0 , \frac{\pi}{4}\right[$.

1) Donner la forme exponentielle de z .

2)a) Montrer que $u = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$. En déduire le module et un argument de u .

b) Pour quelle valeur de θ , les points O , M et N sont alignés ?

3) Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$.