Les systèmes de numération

I- Introduction :

La création de de la numérotation est un des faits les plus marquants de l'histoire de l'humanité. Si la plupart des civilisations ont adopté le système décimal, c'est qu'il a toujours été naturel de compter sur ses doigts.
Pour qu'une information numérique soit traitée par un circuit, elle doit être mise sous forme adoptée à celui-ci. Pour cela il faut choisir un système de numération (de bade B).
De nombreux systèmes de numération sont utilisés en technologie numérique. Les plus utilisés sont les systèmes : décimal (base 10) ; binaire (base 2). ; octal (base 8) et hexadécimal (base 16).

II- Définitions et vocabulaires :

1- Base du système :

C'est un nombre entier qui représente le nombre d'éléments (chiffres) qu'utilise ce système de numération. Donc une base B contient ….. éléments de ….. à ……

2- Digits :

Ce sont les éléments ou les chiffres qui constituent la base. On les appels aussi symboles.

3- Représentation d'un nombre : notion de position et de pondération :

Tout nombre N peut se décomposer en fonction des puissances entières de la base de son système de numération. Cette décomposition s'appelle la forme polynomiale du nombre N qui est donnée par :

$$\boldsymbol{N_{(B)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k . B^k \; ; \; avec\ n\ le\ nombre\ de\ chiffre\ (ou\ digits)}$$

Avec :

- **B** : base utilisée.
- **K** : rang du chiffra.
- $\mathbf{a_k}$: chiffre de rang k.
- $\mathbf{B^k}$: c'est la pondération du chiffre a_k (appelé aussi poids).

Le nombre N s'écrit alors dans la base B de la façon suivante :

$$\mathbf{N_{(B)} = a_{n-1}.B^{n-1} + a_{n-2}.B^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1.B^1 + a_0.B^0}$$

Qui s'écrit symboliquement :

$$\mathbf{N_{(B)} = a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ a_2 a_1 a_0}$$

Exemple :

247 = ……………..+……………………..+………………..

………………………………

………………………………

………………………………

III- Les systèmes de numération :

1- Système décimal : base ….

➪ B = ……. Et a_k ∈ {………………………………………………….}

Ce système revêt de l'importance en raison de son acceptation universelle pour représenter les grandeurs du monde courant.

2- Système binaire : base …..

➪ B = ……. Et a_k ∈ {………………………………………………….}

Le système décimal es mal adapté aux circuits numériques car il est difficile de réaliser des circuits électroniques qui puissent fonctionner avec dix niveaux de tensions différents pour représenter les dix chiffres décimaux, par contre il est très facile de concevoir des circuits électroniques qui fonctionnent seulement avec deux niveaux de tension. C'est la raison pour laquelle la plupart des circuits numériques utilisent le système binaire comme système de numération.

- Dans ce système il y a seulement deux symboles (0 et 1) appelés souvent bits « binary digit ».
- L'ensemble des bits s'appelle « mot ».

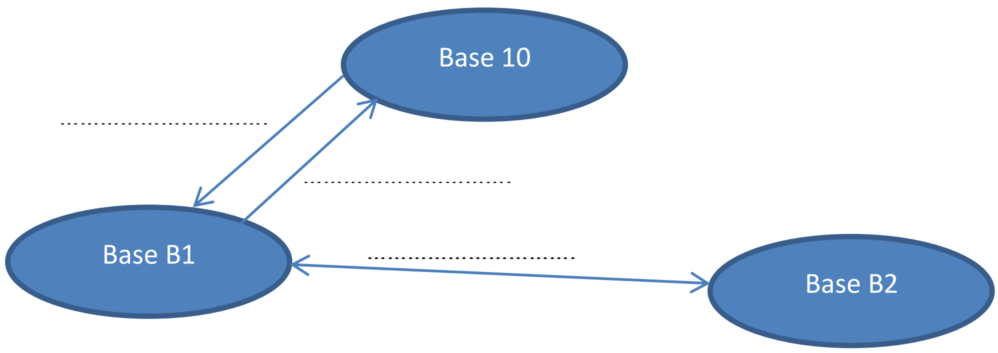
3- Système hexadécimal : base …….

➪ B= ……. Et a_k ∈ {……………………………………………………….}.

Donc les chiffres de 10 à 15 sont représentés par les lettres de A à F.

IV- Changement de système de numération : conversion.

1- Généralités :



2- Décodage :

C'est la conversion d'un nombre de n'importe quelle base en décimal. On utilise toujours la forme vue précédemment :

$$N_{(B)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k . B^k\right)_{(10)}$$

- ✓ **Exemple d'apprentissage :**

Soit à décoder le nombre binaire 1011.

Rang …… → Poids ……….

Rang …… → Poids ……….

Rang …… → Poids ……….

Rang …… → Poids ……….

1011

On applique la formule précédente :

$$(1011)_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots)_{10}.$$

- ✓ **Exercice :**

a- Décoder les nombres binaires suivants. 11 ; 100 ; 100011

………

………

………

b- Décoder les nombres hexadécimal suivants : 10, 1A ; 1F0

………

………

………

3- Codage : conversion d'un nombre décimal en une autre base :

On utilise la méthode des divisions successives (on devise par B, la base).

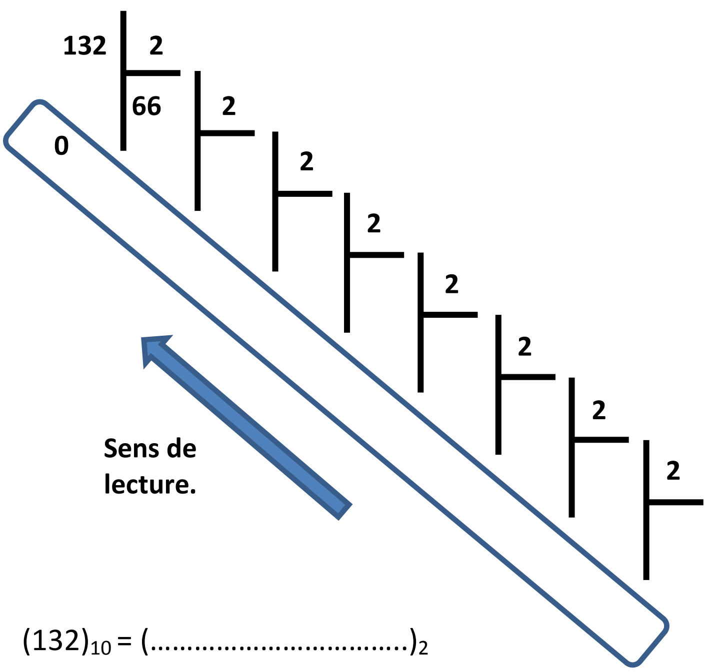
- ✓ **Méthode :**

Soit à convertir un nombre décimal N en base B.

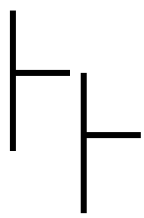
- On devise le nombre N par B
- On refait la division des quotients obtenus jusqu'à l'annulation de ce dernier.
- Le nombre cherché s'écrit en plaçant les restes des divisions successives dans l'ordre inverse de leur obtention.

- ✓ **Exemple d'apprentissage :**

Soit à coder en binaire puis en hexadécimal le nombre décimal 132.



$(132)_{10} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)_2$



$(132)_{10} = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)_{16}$

V- Arithmétique binaire :

1- Addition binaire :

a- Principe :

Le principe est le même que celui de l'addition décimale. Une retenue peut être rapportée au rang supérieur lors de l'addition de deux digits binaires.

0 + 0 = ……
0 + 1 = ……
1 + 0 = ……
1 + 1 = ……

b- Exemple :

Soit à réaliser l'addition en binaire des deux nombres : 13 et 7.

………
………
………
………

1 Multiplication binaire :

a- Principe :

C'est exactement la même qu'en décimale.

b- Exemple :

Effectuer la multiplication des deux nombres binaires : 101101 et 1011.	…………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………