REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4 heures** **COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \ (\bmod 2)$.

b) Si $x \equiv 2 \ (\bmod 14)$ alors $x \equiv 1 \ (\bmod 7)$.

c) Si $4x \equiv 10y \ (\bmod 5)$ alors $x \equiv 0 \ (\bmod 5)$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4 (\bmod 5) \\ y \equiv 5 (\bmod 8) \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

Exercice 2 (6 points)

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 .

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point I $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ au point I.

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Construire I.

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = k$ et $x = k + 1$ où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k$.

5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

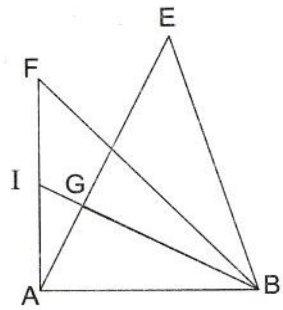
a) Interpréter graphiquement S_n.

b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 (5 points)

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,
I est le milieu de [AF] . Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.



1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.
   a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.
   b) Déterminer la nature de gog et préciser son rapport et son angle.
   c) Montrer que $\tan\left(\widehat{ABI}\right) = \frac{1}{2}$. En déduire que GB = 2 GA.
   d) En déduire que G est le centre de g.

3) Soit r = gof.
   a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

EXERCICE 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA], privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O,\vec{u})$.

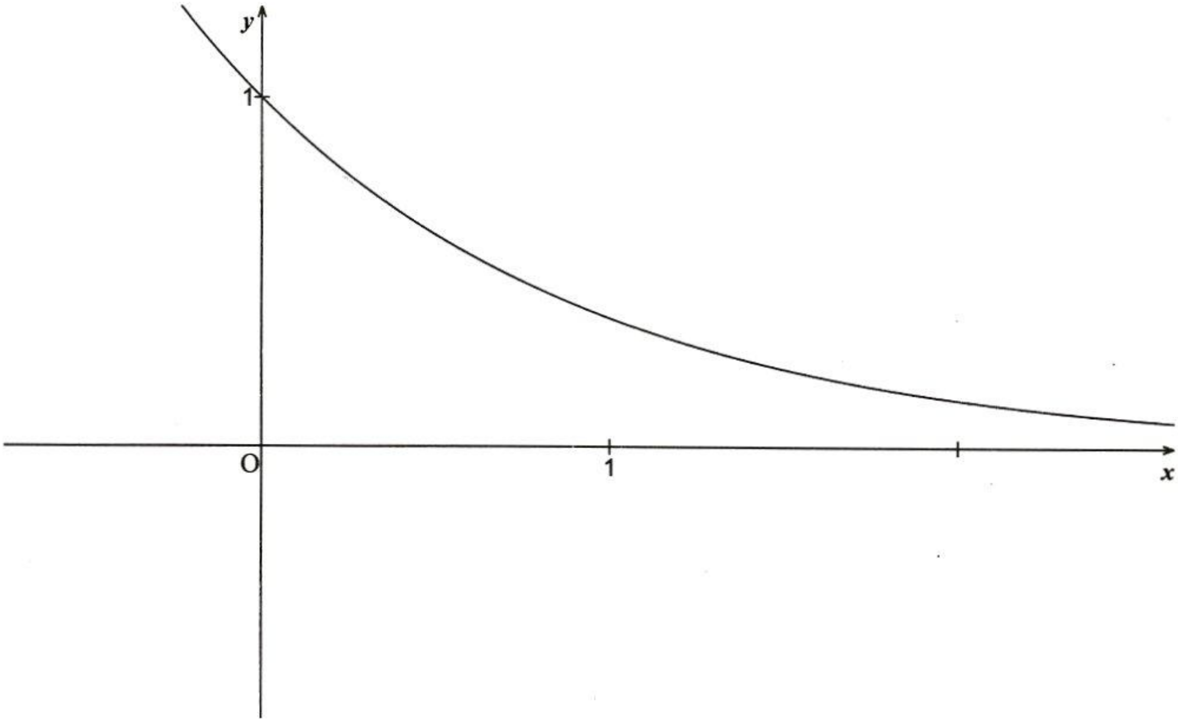
On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 : figure 2