REBUPLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DE BACCALAURÉAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES **DUREE : 3 h** **COEFFICIENT : 3**

Correction proposée par : M. Abderrazek BERREZIG – Professeur principal - Lycée ASSAD IBN AL FOURAT OUED ELLIL

Exercice 1 :

1)	2)	3) i)	ii)
c	a	b	a

Exercice 2 :

1) a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$, pour tout $n \in IN$

$u_1 = \dfrac{4u_0}{1+u_0} = \dfrac{4}{2} = 2$, $u_2 = \dfrac{4u_1}{1+u_1} = \dfrac{8}{3}$

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in IN,\ 0 < u_n < 3$

Pour n = 0, $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 3$. Le résultat est donc vérifié.

On Suppose maintenant que le résultat est vrai pour un certain entier n, $0 < u_n < 3$

On démontre qu'elle vrai pour n +1.

$u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n} = 4 - \dfrac{4}{1+u_n}$, $0 < u_n < 3 \Leftrightarrow 1 < 1+u_n < 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{1+u_n} < 1$

D'où $-4 < -\dfrac{4}{1+u_n} < -1$ ainsi $0 < u_{n+1} < 3$

Conclusion : pour tout $n \in IN,\ 0 < u_n < 3$

2) a) soit la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$

Pour tout $n \in IN$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{4u_n}{1+u_n} - 3}{\dfrac{4u_n}{1+u_n}} = \dfrac{\dfrac{u_n - 3}{1+u_n}}{\dfrac{4u_n}{1+u_n}} = \dfrac{u_n - 3}{4u_n} = \dfrac{1}{4} v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 3}{u_0} = -2$ donc $v_n = (-2)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

$v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n} \Leftrightarrow v_n u_n = u_n - 3 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3$ donc $u_n = \dfrac{3}{1 - v_n}$ ainsi $u_n = \dfrac{3}{1 + 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n} = \dfrac{3}{1 + \dfrac{2}{4^n}} = \dfrac{3 \times 4^n}{4^n + 2}$

c) (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et comme $u_n = \dfrac{3}{1 - v_n}$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{1 - v_n} = 3$

3) a) soit la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = \dfrac{3}{u_n}$ donc $w_n = \dfrac{3}{\dfrac{3}{1-v_n}} = 1-v_n$

b) $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} 1-v_k = 1-v_0+1-v_1+\cdots+1+v_n = \left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ fois}}\right) - \sum_{k=0}^{n} v_k$

or $\sum_{k=0}^{n} v_k = (-2)\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = -\dfrac{8}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ d'où $S_n = n+1+\dfrac{8}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

c) $S_n = n+1+\dfrac{8}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ donc $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{n+1}{n} + \dfrac{8}{3n}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{8}{3n}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} - \lim_{n\to+\infty}\frac{8}{3n}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = 1$$

Exercice 3

1) $ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

2) $(E): z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$

$$\Delta = \left(2(e^{i\frac{\pi}{12}})\right)^2 - 4\times1\times(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}} + 4ie^{i\frac{\pi}{6}} = 4ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

Les solutions sont $z_1 = \dfrac{2(e^{i\frac{\pi}{12}})+2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_1 = \dfrac{2(e^{i\frac{\pi}{12}})-2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$

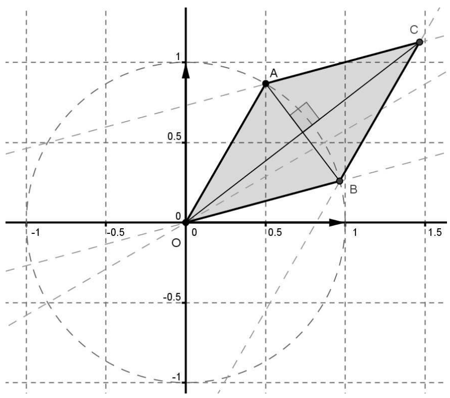
$$S_{\mathbb{C}} = \left\{e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right\}$$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

a) On remarque que $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}} = z_A + z_B \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ donc OACB est un parallélogramme.

De plus $OA = |z_A| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et $OB = |z_B| = \left|e^{i\frac{\pi}{12}}\right| = 1$ donc OA =OB ainsi OACB est un losange.

b)



L'aire du losange OACB =

$$\frac{AB\times OC}{2}=\frac{1}{2}\times\left|e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right|\times\left|e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right|=\frac{1}{2}\times\left|(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{12}})\times(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{12}})\right|=\frac{1}{2}\times\left|e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}\right|$$

Or $\frac{1}{2}\times\left|e^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=\frac{1}{2}\times\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{1}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ua

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(1+x)e^{-x}$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)e^{-x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}+xe^{-x}=0$

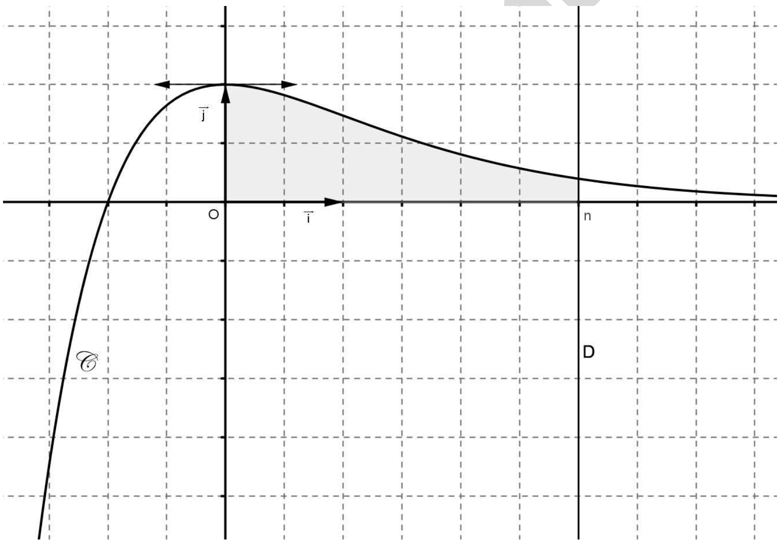
b) f est dérivable sur IR et pour tout réel x, $f'(x)=e^{-x}+(1+x)\times\left(-e^{-x}\right)=\left(1-1-x\right)e^{-x}=-xe^{-x}$

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow -xe^{-x}=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1+x)e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1+x)}{x}e^{-x}=+\infty$ donc la courbe $\mathscr{C}$ de f admet une branche infinie parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{j}\right)$ au voisinage de $(-\infty)$

b)



3) a) $\mathcal{A}_n=\int_0^n f(x)\,dx=\int_0^n (1+x)e^{-x}\,dx$. On pose $\begin{cases}u(x)=1+x\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

On aura donc

$$\mathcal{A}_n=\left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^n-\int_0^n -e^{-x}\,dx=\left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^n-\left[e^{-x}\right]_0^n=(-1-n)e^{-n}+1-e^{-n}+1=(-2-n)e^{-n}+2 \text{ (u a)}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathcal{A}_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(-2-n)e^{-n}+2=\lim\limits_{n\to+\infty}-2e^{-n}-ne^{-n}+2=2$