REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE : MATHEMATIQUES — DUREE : 3h — COEFFICIENT : 3

Exercice 1 :

1) $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$

Réponse : **c**

Justification : On pose $\vec{w} = \overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$ donc $\vec{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ et $\|\vec{w}\| = BF.BC\sin\frac{\pi}{2} = 1$ alors $\vec{w} = \overrightarrow{BA}$

2) L'intersection des plans d'équations x = 1 et y = 1 est la droite (CG)

Réponse : **c**

Justification : Le plan d'équation x = 1 est le plan (BCGF) et Le plan d'équation y = 1 est le plan (DCGH)

Or $(BCGF) \cap (DCGH) = (CG)$

3) Une équation du plan (ACE) est $x - y = 0$.

Réponse : **b**

Justification : On a $A(0,0,0)$; $B(1,1,0)$ et $C(1,1,1)$ les coordonnées de ces points vérifies l'équation x – y =0 .

4) L'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avec le plan P d'équation z = 1 est un cercle.

Réponse : **a**

Justification : La sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ est la sphère de centre A et de rayon $R = \sqrt{2}$

$d(A,P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 < \sqrt{2}$ donc $d(A,P) < R$ alors $S \cap P$ est un cercle.

Exercice 2 :

1) a) $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) $b^2=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $b^2=a$.

2) a) Voir figure.

b) On a $c=a+b=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$ donc $c=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$.

Or $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) a) On a $b^2+b-c=a+b-c$ $\quad$ (car $b^2=a$)

$\Leftrightarrow b^2+b-c=a+b-(a+b)$ (car $c=a+b$)

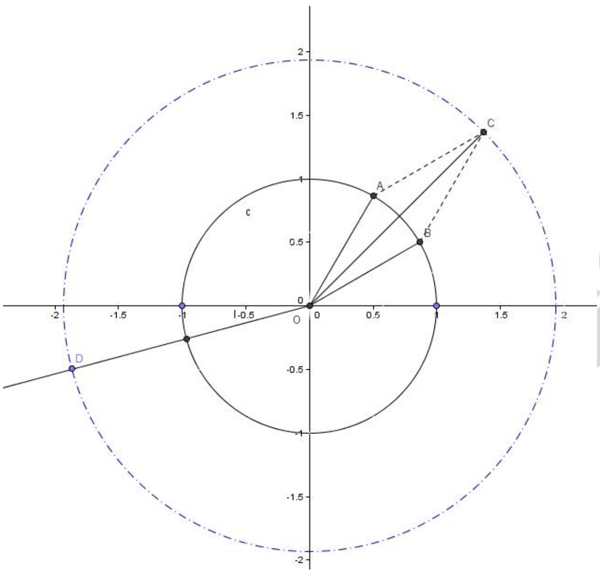
$\Leftrightarrow b^2+b-c=0$. Donc b est une solution de l'équation (E).

b) d est l'autre solution de (E) donc $b.d=-c$ (car $z'.z''=\frac{c}{a}$)

alors $d=-\frac{c}{b}=-\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\pi)}$

donc $d=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\left(-\frac{11\pi}{12}\right)}$.

c)



Exercice 3 :

1) Voir figure.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^2 x-\ln x+1=+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^2 x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}-\ln x=+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln^2 x-\ln x+1=\lim_{x\to+\infty}\ln x(\ln x-1+\frac{1}{\ln x})=+\infty$$

b) * $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x-\ln x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}=0.$

* Interprétation graphique : La courbe (C_f) de f admet une branche infinie de direction $(o,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

c) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\frac{2}{x}\ln x-\frac{1}{x}=\frac{2\ln x-1}{x}$.

d) $f'(x)=0\Leftrightarrow 2\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$.

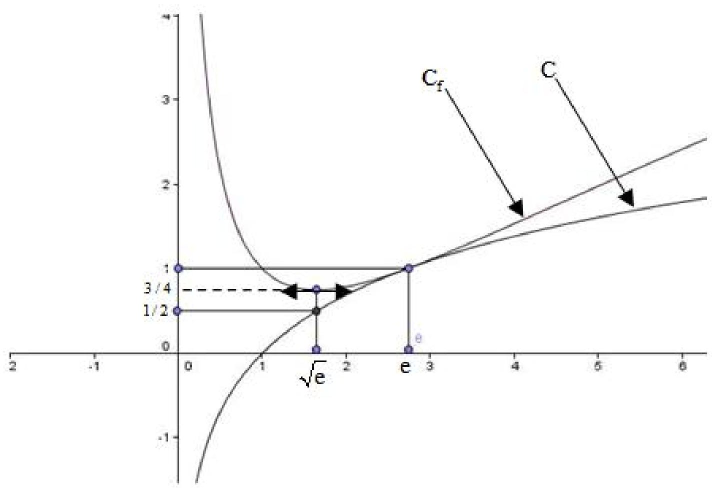
Tableau de variation de f :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $f(x)-\ln x=\ln^2 x-2\ln x+1=(\ln x-1)^2$ donc $f(x)-\ln x\geq 0$ pour tout $x\in\,]0,+\infty[$

Alors (C_f) est au dessus de (C) et $C_f\cap C=\{(1,e)\}$.

b) Figure :



4) a) $I=\int_1^e \ln^2 x\,dx$ on pose $\begin{cases} u(x)=\ln^2 x\rightarrow u'(x)=\frac{2}{x}\ln x \\ v'(x)=1\rightarrow v(x)=x \end{cases}$

alors $I=\left[x\ln^2 x\right]_1^e-\int_1^e 2\ln x\,dx=e-2\int_1^e \ln x\,dx$.

On pose $\begin{cases} u(x)=\ln x \to u'(x)=\frac{1}{x} \\ v'(x)=1 \to v(x)=x \end{cases}$ alors $I=e-2\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e dx\right)=e-2(e-e+1)=e-2$

Conclusion : $I=\int_1^e \ln^2 x\,dx=e-2$.

b) $A=\int_1^e\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_1^e(\ln^2 x-2\ln x+1)dx=\int_1^e \ln^2 x\,dx-2\int_1^e \ln x\,dx+\int_1^e dx$, alors

$A=e-2-2+e-1=2e-5$ donc $A=2e-5$

Exercice 4 :

1) a) On a $e^{-\frac{x}{4}}=x \Leftrightarrow f(x)=y$, graphiquement la droite Δ coupe la courbe C_f en un unique point d'abscisse

$\alpha\in[0,1]$ donc l'équation $e^{-\frac{x}{4}}=x$ admet dans $[0,1]$ une unique solution α.

b) On pose $g(x)=e^{-\frac{x}{4}}-x$ donc $e^{-\frac{x}{4}}=x \Leftrightarrow g(x)=0$.

On a $g(0{,}8)=0.018>0$ et $g(0{,}9)=-0{,}101<0$ alors $g(0{,}8)\times g(0{,}9)<0$ alors $0{,}8<\alpha<0{,}9$

2) (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \ , n\geq 0 \end{cases}$

a) – On a $U_0=1$ donc $0\leq U_0\leq 1$ alors vrai pour n = 0.

– Supposant que $0\leq U_n\leq 1$ et montrons que $0\leq U_{n+1}\leq 1$.

On a : $0\leq U_n\leq 1$ donc $f(1)\leq f(U_n)\leq f(0)$ (graphiquement f est strictement décroissante sur IR)

De plus $f(0)=1$ et $f(1)\geq 0$ alors $0\leq f(U_n)\leq 1$ donc $0\leq U_{n+1}\leq 1$ donc vrai pour n+1.

– Conclusion : $0\leq U_n\leq 1$ pour tout entier naturel n.

b) On a $f(x)=e^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

On a $0\leq x\leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4}\leq -\frac{x}{4}\leq 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}}\leq e^{-\frac{x}{4}}\leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4}\leq f'(x)\leq -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow |f'(x)|\leq \frac{1}{4}$ (car $\left|-\frac{1}{4}\right|>\left|-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}\right|$)

Donc $|f'(x)|\leq \frac{1}{4}$ pour tout $x\in[0,1]$

c) On a f continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ de plus $|f'(x)|\leq\frac{1}{4}$ pour tout $x\in[0,1]$ donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis pour tous a et b de l'intervalle $[0,1]$ on a : $|f(b)-f(a)|\leq\frac{1}{4}|b-a|$

D'autre part on a $0\leq U_n\leq 1$ pour tout entier naturel n et $\alpha\in[0,1]$ donc $|f(U_n)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{4}|U_n-\alpha|$,$\forall n\in IN$

alors $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|U_n-\alpha|$,$\forall n\in IN$ (car $f(\alpha)=\alpha$).

d) On a $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|U_n-\alpha|$,$\forall n\in IN$ donc

$$\left.\begin{array}{l}|U_n-\alpha|\leq\frac{1}{4}\cancel{|U_{n-1}-\alpha|} ,\forall n\geq 1\\ \cancel{|U_{n-1}-\alpha|}\leq\frac{1}{4}\cancel{|U_{n-2}-\alpha|}\\ .\quad\quad .\quad\quad .\\ .\quad\quad .\quad\quad .\\ .\quad\quad .\quad\quad .\\ \cancel{|U_2-\alpha|}\leq\frac{1}{4}\cancel{|U_1-\alpha|}\\ \cancel{|U_1-\alpha|}\leq\frac{1}{4}|U_0-\alpha|\end{array}\right\}\text{produit de n termes positifs}$$

$|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n|U_0-\alpha|$,$\forall n\in IN$, or $|U_0-\alpha|=|1-\alpha|$ et on a $0{,}8<\alpha<0{,}9$ donc $|1-\alpha|\leq 1$ alors

$|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$,$\forall n\in IN$

Remarque : On peut montrer cette inégalité par récurrence

e) On a $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$,$\forall n\in IN$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-\alpha)=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$.

Donc U_n converge vers α.

3) a) Pour que $|U_n-\alpha|<10^{-3}$ il suffit que $\left(\frac{1}{4}\right)^n<10^{-3}$ alors $n\ln\left(\frac{1}{4}\right)<-3\ln 10$ donc $n>\frac{-3\ln 10}{-\ln 4}$

alors $n>4{,}98$ donc $n_0=5$

b) On a $|U_5-\alpha|<10^{-3}$ donc une valeur approchée de α à 10^{-3} prés est U_5.

On a $U_3=f(U_2)\simeq 0{,}814$ $U_1=f(U_0)=f(1)\simeq 0{,}778$; $U_2=f(U_1)\simeq 0{,}823$; $U_3=f(U_2)\simeq 0{,}814$;

$U_5=f(U_4)\simeq 0{,}815$, alors une valeur approchée de α à 10^{-3} prés est $0{,}815$.